Prof. Dr. Michael Rapoport
Dr. Ulrich Görtz **WS 2006/07**

Seminar zur Vorlesung über Periodenbereiche

Blatt 9, Vorträge am 26.10.2006

Seien $n > 0$, k ein algebraisch abgeschlossener Körper, und $\mathcal{F}$ die Flaggenvarietät aller vollständigen Flaggen in k^n. Bezeichne mit $F_\bullet = (0 = F_0 \subsetneq F_1 \subsetneq \cdots \subsetneq F_n = k^n)$ die Standardflagge in k^n. Auf $\mathcal{F}$ operiert die Gruppe B der oberen Dreiecksmatrizen in $G = GL_n$.

Aufgabe 19

Die Bruhat-Zerlegung (vgl. Aufgabe 4 auf Blatt 2) besagt, dass die B-Bahnen durch die *Weyl-Gruppe* S_n der Permutationsmatrizen in G indiziert werden.

Zeige: die B-Bahnen in $\mathcal{F}$ sind genau die nicht-leeren Teilmengen der Form

$$\{(H_i)_i \in \mathcal{F};\ \dim H_i \cap F_j = a_{ij} \text{ für alle } i, j\}, \qquad a_{ij} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$$

Wie bestimmt sich die Familie $(a_{ij})_{ij}$ aus gegebenem $w \in S_n$?

Die B-Bahnen in $\mathcal{F}$ sind lokal-abgeschlossene Teilmengen, die wir als Unterschemata (mit der reduzierten Schema-Struktur) auffassen und als Schubert-Zellen bezeichnen. Die Schubert-Zelle zu $w \in S_n$ bezeichnen wir mit C_w.

Aufgabe 20

Zu einer Permutation $w \in S_n$ bezeichnen wir mit

$$\ell(w) := \#\{(i,j);\ 1 \leq i < j \leq n, w(i) > w(j)\}$$

die Länge von w. Es bezeichne $U \subset B$ die Untergruppe der unipotenten oberen Dreiecksmatrizen, und es sei $U_w = U \cap wUw^{-1}$ der Stabilisator von $wF_\bullet$ in U. Sei schließlich U^- die Gruppe der unipotenten *unteren* Dreiecksmatrizen und $U^w = U \cap wU^-w^{-1}$.

Zeige, dass die Gruppenmultiplikation einen Isomorphismus

$$U^w \times U_w \longrightarrow U$$

induziert und dass

$$C_w = BwB/B = UwB/B = U^w wB/B \cong \mathbb{A}^{\ell(w)}.$$

Aufgabe 21

Wir definieren eine partielle Ordnung (die sogenannte Bruhat-Ordnung) auf S_n durch

$$v \leq w :\Longleftrightarrow \forall d \in \{1, \ldots, n-1\} : (v(1), \ldots, v(d))_- \leq (w(1), \ldots, w(d))_-,$$

wobei zu einem Tupel $(a_1, \ldots, a_d)$ das Tupel $(a_1, \ldots, a_d)_-$ das (eindeutig bestimmte) aufsteigende Tupel bezeichne, das durch Umordnung aus dem Ausgangstupel entsteht, und wobei $\leq$ auf der rechten Seite die komponentenweise (partielle) Ordnung bezeichnet, d.h.

$$(a_1, \ldots, a_d) \leq (b_1, \ldots, b_d) \Longleftrightarrow \forall 1 \leq i \leq d : a_i \leq b_i.$$

Sei nun $w \in S_n$, bezeichne $C_w \subseteq \mathcal{F}$ die zugehörige Schubert-Zelle, und sei $\overline{C}_w \subset \mathcal{F}$ ihr Abschluss (wiederum versehen mit der reduzierten Schema-Struktur). Sei $(a_{ij})_{ij}$ das zugehörige Tupel wie in Aufgabe 19.

Zeige, dass

$$\begin{aligned} \overline{C}_w &= \{(H_i)_i \in \mathcal{F};\ \dim H_i \cap F_j \geq a_{ij}\} \\ &= \bigcup_{v \leq w} C_v \end{aligned}$$

Die abgeschlossenen Untervarietäten $\overline{C}_w$ von $\mathcal{F}$ heißen Schubert-Varietäten.

Aufgabe 22

Sei $n = 4$, und sei

$$w = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in S_4.$$

Gib das Hasse-Diagramm der Teilmenge $\{v \in S_4; v \leq w\} \subset S_4$ bezüglich der Bruhat-Ordnung an. Beobachte, dass die Anzahlen der Elemente der Länge 1 bzw. $\ell(w) - 1$ nicht übereinstimmen.