Bonner Mathematische Schriften

Nr. 389

Artur Wotzke

Die Ruellesche Zetafunktion und die analytische Torsion hyperbolischer Mannigfaltigkeiten

Bonn 2008

BONNER MATHEMATISCHE SCHRIFTEN

Nr. 389

Druck: Rheinische Friedrich-Wilhelms-Universität, Bonn
Mathematisches Institut der Universität
Wegelerstr. 10, D-53115 Bonn
email: bibliothek@math.uni-bonn.de
ISSN 0524-045X

Die Ruellesche Zetafunktion
und
die analytische Torsion
hyperbolischer Mannigfaltigkeiten

Dissertation

zur

Erlangung des Doktortitels (Dr. rer. nat.)

der

Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät

der

Rheinischen Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn

vorgelegt von

Artur Wotzke

aus

Frunse

Bonn 2008

Angefertigt mit Genehmigung der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät der Rheinischen Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn.

1. Referent: Prof. Dr. Werner Müller
2. Referent: Prof. Dr. Werner Ballmann

Tag der Promotion: 13. Oktober 2008.

Zusammenfassung

In dieser Arbeit untersuchen wir die getwistete Ruellesche Zetafunktion $Z_R^\chi(z)$ einer kompakten hyperbolischen Mannigfaltigkeit X ungerader Dimension d. Dabei ist χ eine endlichdimensionale Darstellung von $\pi_1(X)$. Die Ruellesche Zetafunktion ist eine dynamische Zetafunktion, die dem geodädischen Fluss auf dem Einheitssphärenbündel $S(X)$ zugeordnet ist. Sie ist definiert durch ein unendliches Produkt, das in einer Halbebene $\mathrm{Re}(z) \geq c$ absolut konvergiert. Das Produkt läuft über die primitiven geschlossenen geodätischen Kurven von X. Ein fundamentales Resultat von D. Fried besagt, dass $Z_R^\chi(z)$ eine meromorphe Fortsetzung auf ganz $\mathbb{C}$ hat. Von besonderem Interesse ist das Verhalten von $Z_R^\chi(z)$ an der Stelle $z = 0$.

Für den Fall einer unitären azyklischen Darstellung χ konnte Fried mittels der Selbergschen Spurformel zeigen, dass die Ruellesche Zetafunktion in Null regulär ist, und dass deren Wert in $z = 0$ die analytische Torsion von $S(X)$ ist. Dieses Resultat veranlasste Fried zur Formulierung der Vermutung, dass für den Fall einer allgemeinen endlichdimensionalen Darstellung von $\pi_1(X)$ das erste Glied der Laurent-Entwicklung der Ruelleschen Zetafunktion um $z = 0$ durch die analytische Torsion beschrieben wird.

In dieser Arbeit zeigen wir, dass diese Vermutung richtig ist für Darstellungen, die die Einschränkung einer irreduziblen Darstellung der Isometriegruppe von X auf $\pi_1(X)$ sind. Wir identifizieren X mit $\Gamma\backslash G/K$, wobei $G = \mathrm{SO}_e(2n+1,1)$, $K = \mathrm{SO}(2n+1)$ und Γ eine diskrete torsionsfreie kokompakte Untergruppe von G ist. Es sei

$$\tau\colon G \to \mathrm{GL}(V_\tau)$$

eine irreduzible Darstellung vom höchsten Gewicht $\Lambda_\tau = (m_0, \ldots, m_n)$ mit $m_n \neq 0$ und $\chi = \tau\restriction_\Gamma$ die induzierte Darstellung. Weiter definieren wir die induzierte Ruellesche Zetafunktion $Z_R^\tau(z)$ für $\mathrm{Re}(z) \gg 0$ als das Produkt über die primitive Konjugationsklassen $\{\gamma\} \neq \{e\}$ von Γ von Faktoren $\det(\mathrm{Id} - \tau(\gamma)\, \mathrm{e}^{-z\ell(\gamma)})^{-1}$, wobei $\ell(\gamma)$ die Länge von γ ist. Für $Z_R^\tau(z)$ leiten wir eine Produktdarstellung durch die Selbergeschen Zetafunktionen her. Mit der Methode der Spurformel zeigen wir, dass $R^\tau(z) = Z_R^\tau(z) \cdot Z_R^{\tau_\theta}(z)$ in $z = 0$ regulär ist und

$$R^\tau(0) = T^{\mathrm{an}}(\tau)^4,$$

wobei $T^{\mathrm{an}}(\tau)$ die induzierte analytische Torsion ist. Dabei bezeichnet τ_θ die irreduzible Darstellung von G vom höchsten Gewicht $\Lambda_\tau^\theta = (m_0, \ldots, -m_n)$. Der Beweis basiert auf der Berechnung der geometrischen Seite der alternierenden gewichteten Summe der Spuren der Wärmeleitungsoperatoren von $\Delta_r(\tau)$, wobei $\Delta_r(\tau)$ der induzierte Hodge-Laplace-Operator auf r-Differentialformen auf X mit Werten im zu χ-assoziierten flachen Vektorraumbündel E^τ ist:

$$J_\tau(t) = \sum_{r=0}^{2n+1} (-1)^r r \mathrm{Tr}\, \mathrm{e}^{-t\Delta_r(\tau)}.$$

Wir benutzen die auf Fried zurückgehende Methode der virtuellen Theta-Funktionen $H(t;w)$, um die Selbergschen Zetafunktionen meromorph fortzusetzen. Ferner leiten wir eine Determinantenformel für $R^\tau(z)$ her. Diese liefert uns dann den Beweis.

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Es sei X eine kompakte hyperbolische Mannigfaltigkeit ohne Rand der Dimension $2n+1$. Wir identifizieren X mit dem Quotienten $\Gamma\backslash G/K$, wobei die Gruppen $G = \mathrm{SO}_e(2n+1,1)$, $K = \mathrm{SO}(2n+1)$ und Γ eine diskrete torsionsfreie kokompakte Untergruppe von G ist. Es sei $\chi\colon \Gamma \to \mathrm{GL}(V_\chi)$ eine endlichdimensionale Darstellung von Γ in einem komplexen Vektorraum V_χ. Wir betrachten die Ruellesche Zetafunktion

$$Z_R^\chi(z) = \prod_{\substack{\{\gamma\}\neq\{e\}\\ \text{prim}}} \det\big(\mathrm{Id} - \chi(\gamma)\,\mathrm{e}^{-z\ell(\gamma)}\big)^{-1}, \qquad \mathrm{Re}(z) \gg 0,$$

wobei das Produkt über primitive Konjugationsklassen $\{\gamma\}$ von γ in Γ gebildet wird und $\ell(\gamma)$ die Länge der durch γ induzierten geschlossenen Geodätischen bezeichnet. Es sei ν_l die l-te äussere Potenz der Standarddarstellung von $M = \mathrm{SO}(2n)$. Die Ruellesche Zetafunktion $Z_S^\chi(z;\nu_l)$ ist analog durch ein unendliches Produkt definiert. In [Fri86b] zeigt Fried unter der Verwendung einer Produktdarstellung von $Z_R^\chi(z)$ durch die Selbergschen Zetafunktionen $Z_S^\chi(z;\nu_l)$, dass die Ruellesche Zetafunktion eine meromorphe Fortsetzung auf $\mathbb{C}$ hat. Die meromorphe Fortsetzung der Selbergschen Zetafunktionen beweist Fried mittels der Methode der Transportoperatoren. Die sich natürlich anschließende Frage nach den Singularitäten von $Z_S^\chi(z;\nu_l)$ und damit auch von $Z_R^\chi(z)$ kann man mit Hilfe dieser Methode jedoch nicht beantworten.

Es sei $\varphi\colon \Gamma \to \mathrm{GL}(V_\varphi)$ eine unitäre Darstellung von Γ in einem endlichdimensionalen Vektorraum V_φ. Die von Selberg [Sel56] entwickelte und nach ihm benannte Spurformel zur Untersuchung der Selbergschen Zetafunktion $Z_S^\varphi(z)$ auf einer Riemannschen Fläche X, die die logarithmische Ableitung von $Z_S^\varphi(z)$ mit der Spur der Resolvente des Laplace-Operators auf X in Beziehung setzt, ergibt die meromorphe Fortsetzung von $Z_S^\varphi(z)$, eine Funktionalgleichung und eine spektraltheoretische Beschreibung ihrer Singularitäten. Gangolli [Gan77b] verallgemeinerte diese Methode für Selbergsche Zetafunktionen auf höherdimensionalen hyperbolischen Räumen X. Es gelingt ihm, die Singularitäten der logarithmischen Ableitung der Selbergschen Zetafunktion $Z_S^\varphi(z)$ durch das Spektrum des Laplace-Operators auf X auszudrücken. Daraus erhält er, dass alle Residuen von $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\log Z_S^\varphi(z)$ rational sind mit einem gemeinsamen Nenner κ. Auf diese Weise erhält Gangolli, dass $Z_S^\varphi(z)^\kappa$ eine meromorphe Fortsetzung besitzt und einer Funktionalgleichung genügt.

Kombiniert man dieses Resultat mit dem von Fried [Fri86b], so erhält man insbesondere, dass auf ungeradedimensionalen hyperbolischen Mannigfaltigkeiten die Selbergsche Zetafunktion $Z_S^\varphi(z;\nu_l)$ folgender Funktionalgleichung genügt

$$Z_S^\varphi(z;\nu_l) = Z_S^\varphi(-z;\nu_l)\exp\Big(-2\pi\dim(V_\varphi)\,\mathrm{Vol}(X)\int_0^z P(\lambda;\nu_l)\mathrm{d}\lambda\Big), \tag{1}$$

wobei $P(\lambda;\nu_l)$ das Plancherel-Polynom von G ist. Diese Funktionalgleichung bildet den Ausgangspunkt für den von Fried [Fri86a] zuerst erkannten Zusammenhang zwischen der analytischen Torsion $T^{\mathrm{an}}(\varphi)$ und der Ruelleschen Zetafunktion $Z_R^\varphi(z)$ in $z = 0$:

$$Z_R^\varphi(z) = T^{\mathrm{an}}(\varphi)^2, \tag{2}$$

unter der Voraussetzung, dass φ eine azyklische Darstellung von Γ ist. (Zur Erinnerung: eine Darstellung heißt azyklisch, wenn die getwistete Kohomologiegruppe $H^*(X;\varphi)$ verschwindet.) Fried identifiziert mittels der Selbergschen Spurformel die Spur des Wärmeleitungsoperator des Hodge-Laplace-Operators $\Delta_r(\varphi)$ auf r-Differentialformen auf X mit Werten im zu φ assoziierten flachen Vektorraumbündel E^φ mit geometrischen Daten. Aus der Hodge-Zerlegung erhält man, dass $\Delta_r(\varphi) \cong D_r(\varphi) \oplus D_{r-1}(\varphi)$, wobei $D_r(\varphi) := \Delta_r(\varphi)\restriction_{\text{koexakt}}$. Aus der Spurformel von $\mathrm{e}^{-tD_l(\varphi)}$ erhält Fried, dass die regularisierte Determinante von $D_l(\varphi)$ im Wesentlichen durch die Selbergsche Zetafunktion $Z_S^\varphi(z;\nu_l)$ in $z = n-l$ beschrieben wird. Aus der Funktionalgleichung von $Z_S^\varphi(z;\nu_l)$ und der Produktdarstellung von $Z_R^\varphi(z)$ durch $Z_S^\varphi(z;\nu_l)$ erhält er dann (2). Ferner gelingt es Fried [Fri86a, Theorem 4] unter der Verwendung der Funktionalgleichung die Singularitäten von $Z_S^\varphi(z;\nu_l)$ durch die regularisierte Determinante von $D_l(\varphi) + z(z+n-l)\,\mathrm{Id}$ auszudrücken.
Der Schönheitsfehler, dass die gesamte Argumentation in [Fri86a] auf der Funktionalgleichung (1) basiert, deren Beweis eine Kombination aus der Anwendung der Spurformel in [Gan77b] und der Methode der Transportoperatoren in [Fri86b] ist, wurde insbesondere durch Untersuchungen von Voros [Vor87] zur regularisierten Determinanten von elliptischen Differentialoperatoren auf kompakten Mannigfaltigkeiten behoben. Man identifiziert dabei die logarithmische Ableitung der Selbergschen Zetafunktion mit der geometrischen Seite der Spur eines elliptischen selbstadjungierten Differentialoperators D. Auf diese Weise kann man das Spektrum von D, d.h., die Eigenwerte μ_j mit Multiplizität $N(\mu_j)$, mit den Pol-Stellen der logarithmischen Ableitung der Selbergschen Zetafunktion mit Residuen $N(\mu_j)$ identifizieren. Durch Integration erhält man damit direkt, dass die Selbergsche Zetafunktion eine meromorphe Fortsetzung hat und im Wesentlichen durch die regularisierte Determinante von D beschrieben wird. Im Falle einer Riemannschen Fläche X vom Geschlecht $g > 1$ ist Cartier/Voros [CV90] mittels der Selbergschen Spurformel ein Beweis folgender bemerkenswerten Relation gelungen:

$$Z_S(s+1/2) = \mathrm{e}^{2(g-1)s^2}\det(\Delta_X + (s-1/2)(s+1/2))\det((\Delta_{S^2} - 1/4)^{1/2} - s)^{2(g-1)}.$$

Eine Verallgemeinerung dieser Methode auf höherdimensionale lokal-symmetrische Räume vom reellen Rang Eins findet man schließlich im Buch [BO95] von Bunke/Olbrich. Wir bemerken, dass uns für eine beliebige endlichdimensionale Darstellung $\chi\colon \Gamma \to \mathrm{GL}(V_\chi)$ in einem komplexen Vektorraum V_χ die Methode der Selbergschen Spurformel nicht zur Verfügung steht. Damit ist bis auf die Konvergenz und die meromorphe Fortsetzbarkeit nach [Fri86b] über die Ruellesche Zetafunktion $Z_R^\chi(z)$ nichts bekannt. Durch (1) inspiriert formulieren wir folgende Frage.

Frage. *Ist die Ruellesche Zetafunktion $Z_R^\chi(z)$ regulär in $z = 0$ mit*

$$Z_R^\chi(0) = T^{\mathrm{an}}(\chi)^2?$$

Diese Frage muss im Allgemeinen wohl negativ beantwortet werden, siehe die Diskussion in Abschnitt 9.
Das Ziel dieser Arbeit ist die Untersuchung dieses Problems für Darstellungen χ, die die Einschränkung auf Γ einer irreduziblen Darstellung $\tau\colon G \to \mathrm{GL}(V_\tau)$ sind. In diesem Fall

steht uns nach einem Ergebnis von Mathsushima/Murakami [MM63] die Selbergsche Spurformel zur Verfügung mit deren Hilfe wir die obige Frage behandeln werden. Es sei $Z_R^\tau(z)$ die Ruellesche Zetafunktion zur Darstellung $\chi = \tau\restriction_\Gamma$. Es sei $\theta\colon G \to G$ die Cartan-Involution und $\tau_\theta = \tau \circ \theta$. Es sei $R^\tau(z) = Z_R^\tau(z) Z_R^{\tau_\theta}(z)$. Unser Hauptergebnis ist folgendes Theorem.

Theorem. *Es sei $\tau \not\cong \tau_\theta$. Dann ist die Ruellesche Zetafunktion $R^\tau(z)$ an der Stelle $z = 0$ regulär und*

$$R^\tau(0) = T^{\mathrm{an}}(\tau)^4.$$

Diese Arbeit ist folgendermaßen aufgebaut:

In Abschnitt 1 werden wir die Ruellesche Zetafunktion $Z_R^\chi(z)$ betrachten, wobei $\chi\colon \Gamma \to \mathrm{GL}(V_\chi)$ eine beliebige endlichdimensionale Darstellung ist. Weiter werden in diesem Abschnitt die Selbergschen Zetafunktionen $Z_S^\chi(z;\xi)$ definiert, wobei ξ eine irreduzible Darstellung von $M = \mathrm{SO}(2n)$ bezeichnet. Wir zeigen, dass die Ruellesche Zetafunktion $Z_R^\chi(z)$ eine Produktdarstellung durch $Z_S^\chi(z;\xi)$ hat.

In Abschnitt 2 wiederholen wir aus Gründen der Vollständigkeit die Definition der analytischen Torsion für den Fall einer beliebigen endlichdimensionalen Darstellung $\chi\colon \Gamma \to \mathrm{GL}(V_\chi)$. Ein wichtiges Resultat dabei ist, dass im Fall einer azyklischen Darstellung χ die analytische Torion $T^{\mathrm{an}}(\chi)$ nicht von der Wahl einer Hermiteschen Struktur auf dem flachen Vektorraumbündel $E^\chi \to X$ abhängt.

In Abschnitt 3 diskutieren wir die Methode der Selbergschen Spurformel unter dem Aspekt ihrer Anwendung zur Berechnung der Spur des Wärmeleitungsoperators von Bochner-Laplace-Operatoren Δ_σ auf den Schnitten lokal-homogener Vektorraumbündel $E^\sigma \to X$, wobei σ eine unitäre irreduzible Darstellung von K ist.

In Abschnitt 4 werden wir einen Spezialfall einer Darstellung χ von Γ diskutieren, die durch eine endlichdimensionale irreduzible Darstellung $\tau\colon G \to \mathrm{GL}(V_\tau)$ vom höchsten Gewicht $\Lambda_\tau = (m_0, \ldots, m_n)$ mit $m_n \neq 0$ von G induziert wird:

$$\chi = \tau\restriction_\Gamma\colon \Gamma \to \mathrm{GL}(V_\tau).$$

Weil die induzierte Darstellung χ nach Theorem VII.6.7 in [BW00] azyklisch ist, ist die induzierte analytische Torsion $T^{\mathrm{an}}(\tau)^2$ unabhängig von der Hermiteschen Struktur des assoziierten flachen Vektorraumbündels $E^\chi \to X$. In Satz 4.1 zeigen wir, dass $E^\chi \to X$ isomorph zum lokal homogenen Vektorraumbündel $E^\tau = \Gamma\backslash G \times_K V_\tau$ ist. Eine Verallgemeinerung des Lemmas von Kuga liefert uns die Identität $\widetilde{\Delta}_r(\tau) = -R(\Omega) + \tau(\Omega)$ auf r-Differentialformen in $\widetilde{X}$ mit Werten im homogenen Vektorraumbündel $\widetilde{E}^\tau$ über $\widetilde{X}$. Auf diese Weise können wir die oben entwickelte Methode zur Anwendung der Selbergschen Spurformel auf den Wärmeleitungsoperator von $\Delta_r(\tau)$ anwenden.
In Abschnitt 5 wenden wir die Selbergsche Spurformel auf die Funktion

$$J_\tau(t) = \sum_{r=0}^{2n+1} (-1)^r r \operatorname{Tr} e^{-t\Delta_r(\tau)}$$

an. Die entscheidende Vereinfachung zur Berechnung der geometrischen Seite der Spurformel bildet das auf Kostant [Kos61] zurückgehende Theorem 5.1. Das Hauptresultat dieses Abschnitts ist die Spurformel von $J_\tau(t)$:

$$J_\tau(t) = \sum_{w\in W^1} (-1)^{\ell(w)+1}\, \mathrm{e}^{-t\lambda_\tau(w)^2} \Big(\mathrm{Vol}(X) \int_{\mathbb{R}} P(i\lambda; \nu_\tau(w))\mathrm{d}\lambda + \sum_{\{\gamma\}\neq\{e\}} L(\gamma; \nu_\tau(w)) \frac{\mathrm{e}^{-\ell(\gamma)^2/4t}}{(4\pi t)^{1/2}} \Big), \tag{3}$$

wobei W^1 eine Teilmenge der Weyl-Gruppe von G und P das Plancherel-Polynom von G. Weiter bezeichnet $\nu_\tau(w)$ eine durch τ für $w \in W^1$ eindeutig bestimmte irreduzible Darstellung von M und $\lambda_\tau(w) \neq 0$ eine Zahl, die aus Theorem 5.1 hervorgeht, siehe (5.8).

In Abschnitt 6 zeigen wir, dass die induzierte Ruellesche Zetafunktion $Z_R^\tau(z)$ folgende Produktdarstellung durch die Selbergschen Zetafunktionen hat:

$$Z_R^\tau(z) = \prod_{w\in W^1} Z_S(z + \lambda_\tau(w); \nu_\tau(w))^{(-1)^{\ell(w)+1}}. \tag{4}$$

Aus der Voraussetzung $m_n \neq 0$ folgt, dass die irreduzible Darstellung $\nu_\tau(w)$ von M nicht invariant bezüglich der Wirkung der reduzierten Weyl-Gruppe von G ist, wobei m_n die $(n+1)$-Komponente des höchsten Gewichtes $\Lambda_\tau = (m_0, \ldots, m_n)$ der irreduziblen Darstellung τ von G bezeichnet. Millson [Mil78] entdeckte als erster eine Verbindung zwischen Selbergschen Zetafunktionen dieser Art zu der Eta-Invarianten eines Dirac-Operators, siehe hierzu Theorem 4.5 in [BO95]. Diese Beobachtung suggeriert, dass die induzierte Ruellesche Zetafunktion $Z_R^\tau(z)$ in $z = 0$ nicht den Wert $T^{\mathrm{an}}(\tau)^2$ tragen wird und damit zunächst unmittelbar keine weitere Schlüsse zulässt. Darin sehen wir einen Ansatzpunkt für weitere Untersuchungen über die vorliegende Arbeit hinaus, siehe die Diskussion in Abschnitt 9. Anstelle von $Z_R^\tau(z)$ betrachten wir die folgende Ruellesche Zetafunktion:

$$R^\tau(z) := Z_R^\tau(z) Z_R^{\tau_\theta}(z),$$

dabei ist $Z_R^{\tau_\theta}(z)$ die τ_θ-induzierte Ruellesche Zetafunktion, wobei $\tau_\theta\colon G \to \mathrm{GL}(V_\tau^\theta)$ eine irreduzible Darstellung vom höchsten Gewicht $\Lambda_\tau^\theta = (m_0, \ldots, -m_n)$ ist. Für $R^\tau(z)$ erhalten wir mit (4) eine Produktdarstellung durch Selbergsche Zetafunktionen $S(z + \lambda_\tau(w); w)$, wobei

$$S(z; w) := Z_S(z; \nu_\tau(w)) Z_S(z; \nu_{\tau_\theta}(w)).$$

Für diese Funktionen leiten wir der Idee von Cartier/Voros folgend eine Determinantenformel her, die eine komprimierte Beschreibung der Singularitäten von $S(z; w)$ erlaubt. Gesucht wird also ein elliptischer Differentialoperator, dessen regularisierte Determinante die Selbergsche Zetafunktion $S(z; w)$ im Wesentlichen beschreibt.
Ein auf Moscovici/Stanton [MS] zurückgehender Ansatz besteht darin, eine Theta-Funktion, also die Spur des Wärmeleitungsoperators eines verallgemeinerten Laplace-Opera-

tors zu bestimmen, so dass sie dann mit den einzelnen $w \in W^1$ Summanden in (3) mittels der Selbergschen Spurformel identifiziert werden kann:

In Abschnitt 7 konstruieren wir die virtuelle Theta-Funktion $H(t;w)$. Hierfür nutzen wir den Isomorphismus

$$R(K) \cong R(M)^{W_A},$$

wobei $R(K)$ und $R(M)$ die Darstellungsringe von K und M sind und W_A die reduzierte Weyl-Gruppe von G ist. Die Schlüßelstelle zum Beweis der meromorphen Fortsetzbarkeit von $S(z;w)$ bildet die Spurformel $H(t;w) = I(t;w) + G(t;w)$, wobei

$$I(t;w) := \mathrm{e}^{-t\lambda_\tau(w)^2}\,\mathrm{Vol}(X)\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-t\lambda^2}\,P(i\lambda;w)\mathrm{d}\lambda$$

der Beitrag der Identität und

$$G(t;w) := \mathrm{e}^{-t\lambda_\tau(w)^2}\sum_{\{\gamma\}\neq\{e\}} \ell(\gamma_0)L(\gamma;w)\frac{\mathrm{e}^{-\ell(\gamma)^2/4t}}{(4\pi t)^{1/2}}$$

der hyperbolische Beitrag ist. Weiter wenden wir die im Anhang A zusammengefasste Methode der Laplace-Mellin-Transformation auf $H(t;w)$ an und erhalten, dass

$$T^{\mathrm{an}}(\tau)^4 = \prod_{w\in W^1} \det{}_{\mathrm{s}}(\Delta(w)')^{(-1)^{\ell(w)+1}},$$

wobei $\Delta(w)$ verallgemeinerte Laplaceoperatoren sind, so dass $H(t;w) = \mathrm{Tr}_{\mathrm{s}}\,\mathrm{e}^{-t\Delta(w)}$, wobei Tr_{s} die super-Spur bezüglich der natürlichen $\mathbb{Z}_2$-Graduierung in $R(K)$ ist.
Wir nennen eine Funktion $f(t)$, $t > 0$, zulässig im Sinne der Laplace-Mellin-Transformation, wenn sie zum einen eine asymptotische Entwicklung von der folgenden Form hat:

$$f(t) \sim \sum_{k=0}^{\infty} c_{\alpha_k} t^{\alpha_k} \quad \text{für } t \to 0^+,$$

wobei α_k eine von unten beschränkte streng monoton steigende Folge reeller Zahlen ist, zum anderen das Langzeitverhalten von f bis auf eine diskrete endliche Folge durch e^{-ct} mit $c > 0$ beschrieben ist. Das heißt, es existiere $-\infty < b \leq \mu_1 \leq \cdots \leq \mu_N \leq 0$, so dass

$$\Big| f(t) - \textstyle\sum_{j=1}^{N} \mathrm{e}^{-t\mu_j} \Big| = O(\mathrm{e}^{-ct}), \quad \text{für } t \to \infty.$$

In Abschnitt 8 zeigen wir mit Hilfe der Spurformel von $H(t;w)$, dass $S(z;w)$ eine meromorphe Fortsetzung auf $\mathbb{C}$ hat und folgender Funktionalgleichung genügt:

$$S(z;w) = S(-z;w)\exp\Big(-4\pi\,\mathrm{Vol}(X)\int_0^z P(\lambda;w)\mathrm{d}\lambda\Big),$$

wobei P das Plancherel-Polynom von G ist. Dazu bemerken wir, dass der Beitrag der Identität $I(t;w)$ eine zulässige Funktion im Sinne der Laplace-Mellin-Transformation ist. Durch Ausnutzen der Euler-Funktionalgleichung der Γ-Funktion erhalten wir

$$z\,\mathrm{Pf}_{s=1}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-t(z^2+\lambda_\tau(w)^2)}\, I(t;w)t^{s-1}\mathrm{d}t = P(z;w),$$

wobei $\mathrm{Pf}_{s=1}$ das konstante Glied der Laurent-Entwicklung einer meromorphen Funktion um $s = 1$ bezeichnet. Aus der Spurformel von $H(t;w)$ folgt damit, dass $G(t;w)$ ebenfalls zulässig im obigen Sinne ist. Die Laplace-Mellin-Transformierte von $G(t;w)$ ergibt dann die logarithmische Ableitung $Y(z;w)$ von $S(z;w)$. Die Aufintegration liefert eine Determinantenformel von $S(z;w)$. Die aus der Produktdarstellung von $R^\tau(z)$ durch $S(z+\lambda_\tau(w);w)$ resultierende Determinantenformel von $R^\tau(z)$ ergibt schließlich das Hauptresultat.

Danksagung

Die Betreuung der vorliegenden Doktorarbeit lag bei Herrn Prof. Dr. W. Müller. Auch wenn unser ursprünglich geplantes Projekt über die Optimierung des Mobilfunknetzes in Deutschland durch die Resultate dieser Arbeit leider nur wenige entscheidende Impulse erfahren durfte, hat mir das spannende Thema sehr viel Freunde bereitet.
Ich danke Herrn Prof. Dr. W. Müller für seine Wegweisung zum erfolgreichen Gelingen dieser Arbeit. Mit seinem Interesse an diesem Thema war er stets eine anscheinend unerschöpfliche Quelle an Ideen.
Ferner danke ich Herrn Prof. Dr. Werner Ballmann für die Übernahme des Zweitgutachtens.
Die Oberaufsicht über die vorliegende Arbeit führte die Kaffeerunde am Büdschen. Über das Fachliche hinaus haben die motivierenden Gespräche nicht unwesentlich zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen. Danke dafür, Jungs.
Mein herzlichster Dank gilt Jutta für die Unterstützung während der Entstehungszeit dieser Arbeit.

1 Die Ruellesche Zetafunktion $Z_R^\chi(z)$

1.1 Der hyperbolische Raum

Es sei X eine kompakte hyperbolische Mannigfaltigkeit ohne Rand der Dimension d. Die universelle Überlagerung $\widetilde{X}$ von X identifizieren wir mit dem hyperbolischen Raum

$$\{x \in \mathbb{R}^{d+1} \mid -x_0^2 + x_1^2 \cdots + x_d^2 = -1,\ x_0 > 0\}.$$

Die orientierungserhaltenden Isometrien von H^d bilden die Gruppe $G = \mathrm{SO}_e(d,1)$. Die Isotropiegruppe K des Ursprungpunktes $x_0 = (1,0,\dots,0)$ ist $\mathrm{SO}(d)$. Die Fundamentalgruppe $\pi_1(X)$ von X wirkt durch Decktransformationen auf $\widetilde{X}$. Damit existiert eine diskrete torsionsfreie kokompakte Untergruppe Γ von G, so dass

$$X \cong \Gamma\backslash G/K.$$

Es sei $\mathfrak{g}$ die Lie-Algebra von G. Die Killing-Form B auf der Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ von G ist nicht ausgeartet. Die Einschränkung von B auf die Lie-Algebra $\mathfrak{k}$ von K ist negativ definit. Das orthogonale Komplement $\mathfrak{p}$ von $\mathfrak{g}$ identifizieren wir mit dem Tangentialraum von $\widetilde{X}$ in x_0. Es seien θ die Cartan-Involution und

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$$

die zugehörige Cartan-Zerlegung. Die Einschränkung von B auf $\mathfrak{p}$ ist positiv definit und invariant unter der adjungierten Wirkung von K. Die Killing-Form induziert eine invariante Metrik auf $\widetilde{X}$ mit konstanter negativer Krümmung. Auf $\widetilde{X}$ wählen wir die Riemannsche Metrik, die durch

$$\langle Y, Y'\rangle := \frac{1}{2d-2} B(Y,Y') \tag{1.1}$$

induziert wird. Bezüglich dieser Metrik ist $\widetilde{X}$ eine Mannigfaltigkeit konstant negativer Krümmung -1. Es seien $\mathfrak{a}$ der maximal abelsche Unterraum von $\mathfrak{p}$ und M der Zentralisator von $\mathfrak{a}$ in K sowie $\mathfrak{m}$ die Lie-Algebra von M. Es sei $A \subset G$ die Liesche Gruppe von $\mathfrak{a}$. Es gilt

$$\dim A = 1.$$

Es sei weiter $\triangle_A$ das reduzierte Wurzelsystem von $\mathfrak{g}$ bezüglich $\mathfrak{a}$. Mit $\mathfrak{g}^\alpha$ bezeichnen wir den Wurzelraum zu $\alpha \in \triangle_A$. Wir wählen ein positives Wurzelssystem $\triangle_A^+$ in $\triangle_A$. Es sei

$$\mathfrak{n} = \sum_{\alpha \in \triangle_A^+} \mathfrak{g}^\alpha.$$

Damit erhalten wir die Iwasawa-Zerlegung $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$ und die entsprechende Iwasawa-Zerlegung $G = KAN$. Wir definieren

$$\rho := \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in \triangle_A^+} \dim(\mathfrak{g}^\alpha).$$

Es sei $\mathfrak{a}^+$ die positive Weyl-Kammer der reduzierten Weyl-Gruppe $W_A = M'/M$ von $\mathfrak{a}$ in $\mathfrak{g}$, wobei M' der Normalisator von $\mathfrak{a}$ in K ist. Es sei $H_\mathbb{R} \in \mathfrak{a}^+$, so dass $\langle H_\mathbb{R}, H_\mathbb{R}\rangle = 1$. Dieses Element ist eindeutig bestimmt. In der Tat, es sei $\alpha_\mathbb{R}$ die lange Wurzel von $\mathfrak{g}$. Dann ist $H_\mathbb{R} \in \mathfrak{a}$, so dass $\alpha_\mathbb{R}(H_\mathbb{R}) = 1$. Dann definieren wir $a_u \in A^+$ durch $a_u = \exp(uH_\mathbb{R})$ mit $u \in \mathbb{R}^+$. Mittels Cartan-Zerlegung $G = KA^+K$ schreiben wir $g \in G$ als ka_uk'. Dann ist

$$u = d(x, x_0),$$

wobei d der geodätische Abstand zwischen $x = gK$ und $x_0 = eK$ in G/K ist. Es ist einfach einzusehen [GKM75], dass

$$\left\{\begin{matrix}\text{nicht triviale}\\ \text{Konjugationsklassen in } \Gamma\end{matrix}\right\} \overset{1:1}{\leftrightarrow} \left\{\begin{matrix}\text{freie Homotopieklassen}\\ \text{geschlossener Kurven in } X\end{matrix}\right\}.$$

Es sei $\{\gamma\}$ eine Konjugationsklasse in Γ. Weil X negativ gekrümmt ist, beinhaltet die zugehörige Homotopieklasse c_γ immer eine geschlossene Geodätische τ_γ. Es sei $\ell(\gamma)$ die Länge von τ_γ. Jede geschlossene Kurve in dieser Homotopieklasse können wir zu einer Kurve der selben Länge auf $\widetilde{X}$ liften, die die Punkte x und γx in $\widetilde{X}$ verbindet. Dann ist $\ell(\gamma)$ die minimale Länge der Kurven von x nach γx in $\widetilde{X}$. Das heißt $\ell(\gamma) = \inf_{x\in\widetilde{X}} d(x, \gamma x)$, wobei d der geodätische Abstand auf $\widetilde{X}$ ist. Wir liften den geodätischen Abstand d auf $\widetilde{X}$ zu einer K-biinvarianten Funktion δ auf G

$$\delta(g^{-1}g') := d(x, x'), \tag{1.2}$$

wobei x und x' in den Nebenklassen gK und $g'K$ liegen. Dann ist $d(x, \gamma x) = d(gK, \gamma gK) = d(K, g^{-1}\gamma gK) = \delta(g^{-1}\gamma g)$. Damit ist

$$\ell(\gamma) = \inf_{g\in G} \delta(g^{-1}\gamma g).$$

Daraus folgt, dass $\ell(\gamma)$ nur von der Konjugationsklasse von γ abhängt. Um $\ell(\gamma)$ zu bestimmen, können wir damit γ durch ein zu γ konjugiertes Element $g_\gamma \in G$ ersetzen, auch wenn g_γ nicht in Γ liegt. Weil $\Gamma\backslash G$ kompakt ist, sind alle Elemente von Γ halbeinfach. Aus der Torsionsfreiheit von Γ folgt mit [LMR00, Korollar 2.6], dass alle Elemente $\gamma \neq e$ hyperbolisch sind, d.h., sie sind konjugiert zu $m_\gamma a_\gamma$ in MA^+. Daraus folgt

$$\ell(\gamma) = \delta(a_\gamma).$$

Es sei $\mathrm{d}k$ das normalisierte Haar-Maß auf K, d.h. $\int_K \mathrm{d}k = 1$. Das Haar-Maß $\mathrm{d}g$ auf G kann derart normalisiert werden, dass für alle $f \in C_c^\infty(G)$ folgendes gilt:

$$\int_G f(g)\mathrm{d}g = \iiint_{K\times A\times N} f(ka_un)\exp(2\rho uH_\mathbb{R})\mathrm{d}k\mathrm{d}u\mathrm{d}n, \tag{1.3}$$

wobei $\mathrm{d}u$ das Lebesgue-Maß auf $\mathbb{R}$ und $\mathrm{d}n$ das Haar-Maß auf N sind, siehe [Wal73, Proposition 7.6.4]. Dieses Haar-Maß entspricht dem Volumenelement, das durch die Riemannsche Metrik $\langle Y, Y'\rangle_\theta = -\langle Y, \theta(Y')\rangle$ auf G für $Y, Y' \in \mathfrak{g}$ induziert wird, wobei $\langle\cdot\,,\cdot\rangle$ wie in (1.1) und θ die Cartan-Involution von G mit $\mathrm{Fix}_G(\theta) = K$ ist.

1.2 Die Ruellesche Zetafunktion $Z_R^\chi(z)$

Wir folgen Bunke/Olbrich [BO95]. Weil K transitiv auf Einheitsvektoren von $\mathfrak{p}$ wirkt, identifizieren wir das Einheitssphärenbündel $S\widetilde{X} \subset T\widetilde{X}$ mit G/M. Damit ist

$$SX \cong \Gamma\backslash G/M.$$

Der geodätische Fluss Φ auf SX bezüglich der durch $\langle\cdot,\cdot\rangle$ induzierten invarianten Riemannschen Metrik auf X wird beschrieben durch

$$\Phi\colon \mathbb{R}\times\Gamma\backslash G/M \to \Gamma\backslash G/M, \quad (t,\Gamma gM) \mapsto \Gamma g\exp(-tH_{\mathbb{R}})M,$$

wobei $H_{\mathbb{R}}$ der Einheitsvektor in $\mathfrak{a}$ bezüglich $\langle\cdot,\cdot\rangle$ ist, siehe [GF52, Mau57].
Es sei ξ eine unitäre Darstellung von M in einem endlichdimensionalen komplexen Vektorraum W_ξ. Weiter sei $\chi\colon \Gamma\to \mathrm{GL}(V_\chi)$ eine endlichdimensionale komplexe Darstellung. Mit $F^{\xi,\chi}$ bezeichnen wir das Vektorraumbündel über SX, das durch die Darstellung ξ und χ induziert wird. Das heißt

$$F^{\chi\otimes\xi} = \Gamma\backslash(G\times_M V_\chi\otimes W_\xi).$$

Wir liften den geodätischen Fluss Φ auf $F^{\chi,\xi}$ durch

$$\Phi^{\chi,\xi}\colon \mathbb{R}\times F^{\chi,\xi}\to F^{\chi,\xi}, \quad (t,[g,v\otimes w]) \mapsto [g\exp(-tH_{\mathbb{R}}), v\otimes w].$$

Nach Definition des geodätischen Flusses bildet die Projektion periodische Trajektorien von Φ auf geschlossene Geodätische in X ab. Wir haben oben bereits bemerkt, dass die Menge der Konjugationsklassen von Γ mit der Menge der Homotopieklassen geschlossener Kurven in X korrespondiert. Im Fall der hyperbolischen Mannigfaltigkeit $X=\Gamma\backslash G/K$ ist dieser Zusammenhang offensichtlich. Es sei $\{\gamma\}\neq\{e\}$ eine Konjugationsklasse von Γ. Dann ist die zugehörige periodische Trajektorie gegeben durch

$$c_\gamma := \{\Gamma g\exp(-tH_{\mathbb{R}})M \mid t\in\mathbb{R}\},$$

wobei $g\in G$, so dass $g^{-1}\gamma g = m_\gamma a_\gamma \in MA^+$. Die Länge $\ell(c_\gamma)$ von c_γ ist dann $\ell(\gamma) = \log(a_\gamma)$. In der Tat folgt aus $\gamma g = m_\gamma a_\gamma g$

$$\Gamma g\exp(-\ell(\gamma)H_{\mathbb{R}})M = \Gamma\gamma^{-1}gM = \Gamma gM.$$

Der Lift von $c=c_\gamma$ auf $F^{\chi,\xi}$ induziert eine lineare Transformation $M^{\chi,\xi}(c)$ auf der Faser von $F^{\chi,\xi}$ über ΓgM. Die Monodromieabbildung $M^{\chi,\xi}(c)$ von c beschreibt die Transformation dieser Faser, d.h., $M^{\chi,\xi}(c)([g,v\otimes w]) = [g\exp(-\ell(\gamma)H_{\mathbb{R}}), v\otimes w]$. Damit ist

$$\begin{aligned} M^{\chi,\xi}(c)([g,v\otimes w]) &= [ga_\gamma^{-1}, v\otimes w] = [ga_\gamma^{-1}m_\gamma^{-1}, v\otimes\xi(m_\gamma)w] \\ &= [\gamma^{-1}g, v\otimes\xi(m_\gamma)w] = [g,\chi(\gamma)v\otimes\xi(\gamma)w]. \end{aligned}$$

Eine geschlossene Trajektorie c durch $y\in SX$, die durch $\{\gamma\}$ bestimmt wird, heißt primitiv, wenn $t=\ell(\gamma)$ die kleinste Periode von Φ mit $\Phi(t,y)=y$ ist.

Der kritische Exponent von χ

In [BO95] wird ausschließlich eine unitäre Darstellung von Γ betrachtet. Diese Einschränkung möchten wir fallen lassen und werden sie an dieser Stelle verallgemeinern. Es sei $\chi\colon \Gamma \to \mathrm{GL}(V_\chi)$ eine endlichdimensionale Darstellung. Wir wählen eine Norm $\|\cdot\|$ auf V_χ. Dann existiert ein $c \geq 0$, so dass

$$\|\chi(\gamma)\| \leq \mathrm{e}^{c\ell(\gamma)}.$$

Beweis. Es sei $\{\gamma_1, \ldots, \gamma_p\} \subset \Gamma$ ein Erzeugersystem von Γ und $\|\chi(\gamma_j)\| = C_j$. Es sei $\gamma \in \Gamma$. Dann ist $\gamma = \gamma_1^{n_1} \cdots \gamma_p^{n_p}$. Daraus folgt

$$\|\chi(\gamma)\| \leq e^{c\ell_W(\gamma)}, \tag{1.4}$$

wobei $\mathrm{e}^c = \max_j C_j$ und $\ell_W(\gamma)$ die Wort-Länge von γ bezüglich $\{\gamma_j\}_j$ ist. Nach einem Standardresultat aus der geometrischen Gruppentheorie (siehe zum Beispiel [LMR00, Proposition 3.2]) ist $\ell_W(\gamma)$ quasiisometrisch zu $d(x, \gamma x)$, d.h., es existieren $A, B > 0$ mit

$$B^{-1}\ell_W(\gamma) - A \leq d(x, \gamma x) \leq B\ell_W(\gamma) + A.$$

Daraus folgt die Aussage. □

Um die Abhängigkeit von der Wahl einer Norm auf V_χ in (1.4) zu eliminieren, definieren wir

$$c_\chi := \inf\{c \geq 0, \text{ für die (1.4) erfüllt ist}\} \tag{1.5}$$

den *kritischen Exponenten* von $\chi\colon \Gamma \to \mathrm{GL}(V_\chi)$.
Aus (1.3) folgt, es existiert eine Konstante $C > 0$, so dass $\mathrm{Vol}(B_R(x_0)) = C\,\mathrm{e}^{2\rho R}$. Damit erhalten wir

$$\#\{\{\gamma\} \mid \ell(\gamma) < R\} < \{\gamma \in \Gamma \mid \ell(\gamma) \leq R\} \leq C\,\mathrm{e}^{2\rho R}. \tag{1.6}$$

Definition 1.1. Die Ruellesche Zetafunktion $Z_R^\chi(z;\xi)$ bezüglich $\Phi^{\chi,\xi}$ ist definiert durch

$$\begin{aligned} Z_R^\chi(z;\xi) &:= \prod_{c \text{ prim}} \det\left(\mathrm{Id} - M^{\chi,\xi}(c)\,\mathrm{e}^{-z\ell(c)}\right)^{-1} \\ &= \prod_{\substack{\{\gamma\}\neq\{e\} \\ \text{prim}}} \det\left(\mathrm{Id} - \chi(\gamma) \otimes \xi(m_\gamma)\,\mathrm{e}^{-z\ell(\gamma)}\right)^{-1} \end{aligned}$$

für $\mathrm{Re}(z) > 2\rho + c_\chi$.

Aus (1.4) und (1.6) folgt

$$\begin{aligned} \log Z_R^\chi(z;\xi) &= -\sum_{\substack{\{\gamma\}\neq\{e\} \\ \text{prim}}} \operatorname{tr} \log(\mathrm{Id} - \chi(\gamma) \otimes \xi(m_\gamma)\,\mathrm{e}^{-z\ell(\gamma)}) \\ &= \sum_{\substack{\{\gamma\}\neq\{e\} \\ \text{prim}}} \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{tr}\chi(\gamma) \operatorname{tr}\xi(m_\gamma) \frac{\mathrm{e}^{-zk\ell(\gamma)}}{k} \end{aligned}$$

$$= \sum_{\{\gamma\}\neq\{e\}} \operatorname{tr}\chi(\gamma)\operatorname{tr}\xi(m_\gamma)\frac{e^{-z\ell(\gamma)}}{\mu(\gamma)},$$

welche für $\mathrm{Re}(z) > 2\rho + c_\chi$ exponentiell konvergiert, wobei $\mu(\gamma)$ die Multiplizität von γ ist. Daraus folgt, dass $Z_R^\chi(z;\xi)$ keine Singularitäten in der Halbebene $\mathrm{Re}(z) > 2\rho + c_\chi$ hat. □

Notation. Wenn die Darstellung von M trivial ist, schreiben wir $Z_R^\chi(z)$ für die Ruellesche Zetafunktion.

1.3 Die Selbergsche Zetafunktion

Es ist allgemein bekannt, dass auf einer Mannigfaltigkeit negativer Krümmung der geodätische Fluss Φ ein Anosov-Fluss ist, d.h., es existiert eine $\mathrm{d}\Phi$-invariante Aufspaltung des Tangentialbündels von SX in Flussrichung T^0SX und stabile bzw. instabile Richtungen T^sSX bzw. T^uSX:

$$TSX = T^sSX \oplus T^0SX \oplus T^uSX.$$

Die Monodromieabbildung $P_c = \mathrm{d}\Phi_{\ell(c)}$ einer periodischen Trajektorie c, in diesem Zusammenhang auch Poincaré-Abbildung genannt, zerfällt bezüglich der obigen Aufspaltung von TSX in

$$P_c = P_c^s \oplus \mathrm{Id} \oplus P_c^u.$$

Aus der Identifikation $SX \cong \Gamma\backslash G/M$ erhalten wir

$$TSX \cong \Gamma\backslash G \times_M (\bar{\mathfrak{n}} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}),$$

wobei $\bar{\mathfrak{n}} = \theta\mathfrak{n}$ die Summe negativer Wurzeln von $\mathfrak{a}$ ist.

Definition 1.2. Die Selbergsche Zetafunktion ist definiert durch

$$\begin{aligned} Z_S^\chi(z;\xi) &:= \prod_{c\,\text{prim}} \prod_{j=0}^{\infty} \det\left(\mathrm{Id} - M^{\chi,\xi}(c) \otimes S^j P_c^s(\gamma_c)\, e^{-(z+\rho)\ell(c)}\right), \\ &= \prod_{\substack{\{\gamma\}\neq\{e\}\\ \text{prim}}} \prod_{j=0}^{\infty} \det\left(\mathrm{Id} - \chi(\gamma) \otimes \xi(m_\gamma) \otimes S^j \operatorname{Ad}(m_\gamma a_\gamma)_{\bar{\mathfrak{n}}}\, e^{-(z+\rho)\ell(\gamma)}\right) \end{aligned}$$

für $\mathrm{Re}(z) > \rho + c_\chi$, wobei S^j das j-fache symmetrische Produkt bezeichnet.

In der Tat

$$\begin{aligned} \log Z_S^\chi(z;\xi) &= \sum_{\substack{\{\gamma\}\neq\{e\}\\ \text{prim}}} \sum_{j=0}^{\infty} \operatorname{tr}\log(\mathrm{Id} - \chi(\gamma) \otimes \xi(m_\gamma) \otimes S^j \operatorname{Ad}(m_\gamma a_\gamma)_{\bar{\mathfrak{n}}}\, e^{-(z+\rho)\ell(\gamma)}) \\ &= -\sum_{\substack{\{\gamma\}\neq\{e\}\\ \text{prim}}} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{tr} \frac{\left(\chi(\gamma) \otimes \xi(m_\gamma) \otimes S^j \operatorname{Ad}(m_\gamma a_\gamma)_{\bar{\mathfrak{n}}}\, e^{-(z+\rho)\ell(\gamma)}\right)^k}{k} \end{aligned}$$

$$= -\sum_{\{\gamma\}\neq\{e\}} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\operatorname{tr}\chi(\gamma)\operatorname{tr}\xi(m_\gamma)\operatorname{tr}(S^j \operatorname{Ad}(m_\gamma a_\gamma)_{\overline{\mathfrak{n}}})}{\mu(\gamma)} \mathrm{e}^{-(z+\rho)\ell(\gamma)}$$
$$= -\sum_{\{\gamma\}\neq\{e\}} \frac{1}{\mu(\gamma)} \operatorname{tr}\chi(\gamma) \frac{\operatorname{tr}\xi(m_\gamma)\,\mathrm{e}^{-\rho\ell(\gamma)}}{\det(\mathrm{Id}-\operatorname{Ad}(m_\gamma a_\gamma)_{\overline{\mathfrak{n}}})} \mathrm{e}^{-z\ell(\gamma)},$$

wobei bei der letzten Umformung folgende Identität benutzt wird:

$$\det(\mathrm{Id}-\operatorname{Ad}(m_\gamma a_\gamma)_{\overline{\mathfrak{n}}}) \sum_{j=0}^{\infty} \operatorname{tr} S^j \operatorname{Ad}(m_\gamma a_\gamma)_{\overline{\mathfrak{n}}} = 1.$$

Mit Hilfe der Spurformel wird in [Gan77a, DeG77] gezeigt, dass das Längenspektrum $\{\ell(\gamma) \mid \{\gamma\} \neq \{e\}\}$ keinen endlichen Häufungspunkt hat. Daraus folgt, dass ein $C > 0$ existiert, so dass für alle $\gamma \in \Gamma$

$$\frac{1}{\det(\mathrm{Id}-\operatorname{Ad}(m_\gamma a_\gamma)_{\overline{\mathfrak{n}}})} < C.$$

Aus (1.4) und (1.6) erhalten wir, dass die Selbergsche Zetafunktion $Z_S^\chi(z;\xi)$ für $\operatorname{Re}(z) > \rho + c_\chi$ analytisch ist. □

Es sei

$$L^\chi(\gamma;\xi) := \operatorname{tr}\chi(\gamma) \frac{\operatorname{tr}\xi(m_\gamma)\,\mathrm{e}^{-\rho\ell(\gamma)}}{\det(\mathrm{Id}-\operatorname{Ad}(m_\gamma a_\gamma)_{\overline{\mathfrak{n}}})}. \tag{1.7}$$

Dann ist die Selbergsche Zetafunktion

$$Z_S^\chi(z;\xi) = \exp\Big(-\sum_{\{\gamma\}\neq\{e\}} \frac{L^\chi(\gamma;\xi)}{\mu(\gamma)} \mathrm{e}^{-z\ell(\gamma)}\Big) \tag{1.8}$$

für $\operatorname{Re}(z) > \rho + c_\chi$.

Mit Hilfe dieser Darstellung der Selbergschen Zetafunktion erhalten wir sofort, dass die logarithmische Ableitung $Y^\chi(z;\xi) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\log Z_S^\chi(z;\xi)$ von $Z_S^\chi(z;\xi)$ von der folgenden Form ist

$$Y(z;\xi) = \sum_{\{\gamma\}\neq\{e\}} \ell(\gamma_0) L^\chi(\gamma;\xi)\,\mathrm{e}^{-z\ell(\gamma)},$$

wobei $\ell(\gamma_0) = \ell(\gamma)/\mu(\gamma)$.

Notation. Es sei $\mathbb{1}: \Gamma \to \mathrm{GL}(\mathbb{C})$ die triviale Darstellung von Γ. In diesem Fall schreiben wir einfach $Z_S(z;\xi)$ für $Z_S^{\mathbb{1}}(z;\xi)$. Diese Vereinbarung der Notation wenden wir in (1.7) an, d.h., wir schreiben vereinfacht

$$Z_S(z;\xi) = \exp\Big(-\sum_{\{\gamma\}\neq\{e\}} \frac{L(\gamma;\xi)}{\mu(\gamma)} \mathrm{e}^{-z\ell(\gamma)}\Big), \quad \operatorname{Re}(z) > \rho.$$

Bemerkung. Falls die Darstellung ξ von M nicht invariant unter der Wirkung von $w_A W_A$ ist, betrachten wir die Selbergsche Zetafunktion

$$S^{\chi}(z;\xi) \coloneqq Z_S^{\chi}(z;\xi)\cdot Z_S^{\chi}(z;w_A\xi). \tag{1.9}$$

Bemerkung. Es sei $\varphi\colon \Gamma \to \mathrm{GL}(V_\varphi)$ eine unitäre Darstellung. Dann ist der Definitionsbereich der Rueleschen und der Selbergschen Zetafunktion unabhängig von φ, d.h., für alle unitären Darstellungen φ sind $Z_R^{\varphi}(z;\xi)$ und $Z_S^{\varphi}(z;\xi)$ analytische Funktionen in $\mathrm{Re}(z) > 2\rho$. In der Tat ist der kritische Exponent c_φ von φ gleich Null.

1.4 Produktdarstellung von $Z_R^{\chi}(z)$

Wir definieren die Standarddarstellung $\nu\colon M \to \mathrm{GL}(\mathbb{R}^{2n})$ von M als den trivialen Lift von $M \hookrightarrow \mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{R})$. Es sei ν_l die äußere Potenz Λ^l von ν, d.h.,

$$\nu_l\colon M \to \mathrm{GL}(\Lambda^l\mathbb{R}^{2n}), \quad 0 \le l \le 2n, \tag{1.10}$$

wobei $\nu_0 = \mathbb{1}$ die triviale Darstellung ist. Für $l \neq n$ ist ν_l eine irreduzible Darstellung von M. Für $l = n$ zerfällt $\nu_n\colon M \to \mathrm{GL}(\Lambda^n\mathbb{R}^{2n})$ in $\nu^+ \oplus \nu^-$, wobei $\nu^{\pm}$ die Spin-Darstellungen von M sind, siehe [Fri97, Abschnitt 1.5].

Satz 1.3. *Für* $\mathrm{Re}(z) \gg 0$ *gilt*

$$Z_R^{\chi}(z) = \prod_{l=0}^{2n} Z_S^{\chi}(z-\rho+l;\nu_l)^{(-1)^{l+1}}. \tag{1.11}$$

Beweis. Durch Einfügen der Eins, in Form von

$$\begin{aligned}
1 &= \det(\mathrm{Id}-\mathrm{Ad}(m_\gamma a_\gamma)_{\overline{\mathfrak{n}}})\sum_{j=0}^{\infty} S^j\,\mathrm{Ad}(m_\gamma a_\gamma)_{\overline{\mathfrak{n}}}\\
&= \Big(\sum_{l=0}^{2n}(-1)^l\Lambda^l\,\mathrm{Ad}(m_\gamma a_\gamma)_{\overline{\mathfrak{n}}}\Big)\Big(\sum_{j=0}^{\infty} S^j\,\mathrm{Ad}(m_\gamma a_\gamma)_{\overline{\mathfrak{n}}}\Big)\\
&= \Big(\sum_{l=0}^{2n}(-1)^l\,\mathrm{e}^{-l\ell(\gamma)}\,\nu_l(m_\gamma)\Big)\Big(\sum_{j=0}^{\infty} S^j\,\mathrm{Ad}(m_\gamma a_\gamma)_{\overline{\mathfrak{n}}}\Big),
\end{aligned}$$

in die Definition von $Z_R^{\chi}(z)$ erhalten wir

$$\begin{aligned}
\log Z_R^{\chi}(z) &= \sum_{l=0}^{2n}(-1)^l\sum_{\{\gamma\}\neq\{e\}}\frac{1}{\mu(\gamma)}\operatorname{tr}\chi(\gamma)\operatorname{tr}\nu_l(m_\gamma)\,\mathrm{e}^{-(z+l)\ell(\gamma)}\sum_{j=0}^{\infty}\operatorname{tr}S^j\,\mathrm{Ad}(m_\gamma a_\gamma)_{\overline{\mathfrak{n}}}\\
&= \sum_{l=0}^{2n}(-1)^{l+1}\log Z_S^{\chi}(z-\rho+l;\nu_l).
\end{aligned}$$

□

Dieser Satz wurde ursprünglich von Fried [Fri86b] bewiesen. Auf Bunke/Olbrich [BO95] geht folgende Verallgemeinerung zurück

$$Z_R^\chi(z;\xi) = \prod_{l=0}^{2n} Z_S^\chi(z-\rho+l;\nu_l\otimes\xi)^{(-1)^{l+1}}. \tag{1.12}$$

Mit Methoden der Transportoperatoren zeigt Fried [Fri86b] unter Verwendung von (1.11), dass die Ruellsche Zetafunktion $Z_R^\chi(z)$ eine meromorphe Fortsetzung auf $\mathbb{C}$ hat. Die Frage –nach dem ersten Glied der Laurententwicklung von $Z_R^\chi(z)$ an der Stelle $z = 0$– kann für eine allgemeine Darstellung $\chi\colon \Gamma \to \mathrm{GL}(V_\chi)$ mit dieser Methode jedoch nicht beantwortet werden.

2 Die analytische Torsion $T^{\mathrm{an}}(\chi)^2$

In diesem Abschnitt wollen wir an die Definition der analytischen Torsion erinnern.
Es sei X eine orientierte, geschlossene Riemannsche Mannigfaltigkeit der Dimension d. Es sei

$$\chi\colon \pi_1(X) \to \mathrm{GL}(V_\chi)$$

eine endlichdimensionale Darstellung der Fundamentalgruppe von X. Die Darstellung χ definiert ein flaches Vektorraumbündel

$$E^\chi \to X.$$

Es sei $\Lambda^r(X,E^\chi)$ der Raum der C^∞-Schnitte des Vektorraumbündels $\Lambda^r T^*X\otimes E^\chi$, also der Raum der glatten r-Differentialformen mit Werten in E^χ. Elemente von $\Lambda^r(X,E^\chi)$ sind die r-Differentialforen ϕ auf der universellen Überlagerung $\widetilde{X}$ von X mit Werten in V_χ, die für jedes $\gamma\in\pi_1(X)$ die Transformationsgleichung $\gamma^*\phi = \chi(\gamma)\phi$ erfüllen, wobei $\pi_1(X)$ durch Decktransformationen auf $\widetilde{X}$ operiert. Es sei d_χ die äußere Ableitung auf $\Lambda^r(X,E^\chi)$, d.h.,

$$\mathrm{d}_\chi\colon \Lambda^r(X,E^\chi) \to \Lambda^{r+1}(X,E^\chi).$$

Weil E^χ flach ist, folgt $\mathrm{d}_\chi\circ\mathrm{d}_\chi \equiv 0$, und wir erhalten den de Rham-Komplex mit Koeffizienten im flachen Vektorraumbündel E^χ

$$\Lambda^0(X,E^\chi) \xrightarrow{\mathrm{d}_\chi} \Lambda^1(X,E^\chi) \xrightarrow{\mathrm{d}_\chi} \cdots \xrightarrow{\mathrm{d}_\chi} \Lambda^d(X,E^\chi).$$

Wir wählen eine Hermitesche Metrik h^χ auf E^χ. Diese induziert einen Isomorphismus

$$\sharp\colon E^\chi \to E^{\chi *},$$

wobei $E^{\chi *}$ das duale Vektorraumbündel ist. Wir setzen $\sharp$ zu einem Isomorphismus

$$\sharp\colon \Lambda^r(X,E^\chi) \to \Lambda^r(X,E^{\chi *})$$

für alle r fort. Ferner definiert die Riemannsche Metrik auf X eine lineare Abbildung

$$*\colon \Lambda^r(X,E^\chi) \to \Lambda^{d-r}(X,E^\chi)$$

für alle r mit $** = (-1)^{r(d-r)}\,\mathrm{Id}$ auf $\Lambda^r(X, E^\chi)$. Wir schreiben kurz $* \circ \sharp$ für

$$(* \otimes \mathrm{Id}) \circ (\mathrm{Id} \otimes \sharp) \colon \Lambda^r T^*X \otimes E^\chi \to \Lambda^{d-r} T^*X \otimes E^{\chi *}.$$

Das gewöhnliche äußere Produkt auf Differentialformen kombiniert mit der Evaluation-Abbildung $\mathrm{tr} \colon E^\chi \otimes E^{\chi *} \to \mathbb{C}$ induziert das folgende äußere Produkt

$$\wedge \colon \Lambda^p(X, E^\chi) \otimes \Lambda^q(X, E^\chi) \to \Lambda^{p+q}(X),$$

wobei $\Lambda^{p+q}(X)$ der Raum der glatten $(p+q)$-Differentialformen auf X ist, [MM63, Abschnitt 2]. Dann ist ein inneres Produkt auf $\Lambda^r(X, E^\chi)$ definiert durch

$$\langle \phi, \psi \rangle := \int_X \phi \wedge \overline{* \circ \sharp \psi}.$$

Es sei $L^2\Lambda^r(X, E^\chi)$ die Vervollständigung von $\Lambda^r(X, E^\chi)$ bezüglich der Norm, die durch dieses innere Produkt induziert wird. Der zu d_χ formal adjungierte Operator auf $\Lambda^r(X, E^\chi)$ ist gegeben durch

$$\delta_\chi = (-1)^{d(r+1)+1} * \circ \sharp^{-1} \circ \mathrm{d}_\chi \circ \sharp \circ *.$$

Wir definieren den Hodge-Laplace-Operator durch

$$\Delta_r(\chi) := \mathrm{d}_\chi \delta_\chi + \delta_\chi \mathrm{d}_\chi.$$

Dann ist $\Delta_r(\chi) \colon \Lambda^r(X, E^\chi) \to \Lambda^r(X, E^\chi)$ ein wesentlich selbstadjungierter, elliptischer Differentialoperator und es gilt

$$\langle \Delta_r(\chi)\phi, \phi \rangle \geq 0$$

für alle $\phi \in \Lambda^r(X, E^\chi)$. Es sei $\mathcal{H}^r(X, E^\chi)$ der Kern von $\Delta_r(\chi)$. Die Elemente dieses Raumes sind E^χ-wertige harmonische r-Differentialformen auf X. Die Abbildung von de Rham induziert einen Isomorphismus

$$\mathcal{H}^r(X, E^\chi) \cong H^r(X; E^\chi),$$

wobei $H^r(X; E^\chi)$ die Kohomologie von X mit Koeffizienten im flachen Vektorraumbündel E^χ ist. Es sei $\Delta_r(\chi)'$ die Einschränkung von $\Delta_r(\chi)$ auf das orthogonale Komplement von $\mathcal{H}^r(X, E^\chi)$ in $L^2\Lambda^r(X, E^\chi)$. Die Zeta-Funktion von $\Delta_r(\chi)$ auf $\Lambda^r(X, E^\chi)$ ist definiert durch

$$\zeta_{\Delta_r(\chi)}(s) = \mathrm{Tr}\Delta_r(\chi)'^{-s}, \qquad \mathrm{Re}(s) > d/2.$$

Mit Hilfe der asymptotischen Entwicklung der Spur des Wärmeleitungsoperators von $\Delta_r(\chi)$ zeigt man, dass $\zeta_{\Delta_r(\chi)}(s)$ eine meromorphe Fortsetzung auf $\mathbb{C}$ hat, siehe [Gil84] und Abschnitt A. Ferner ist Zeta-Funktion von $\Delta_r(\chi)$ regulär in $s = 0$. Es sei

$$\det \Delta_r(\chi)' := \exp\Big(-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\zeta_{\Delta_r(\chi)}(s)\Big|_{s=0}\Big)$$

die regularisierte Determinante von $\Delta_r(\chi)'$.

Wir definieren die *analytische Torsion* $T^{\mathrm{an}}(\chi)$ durch

$$T^{\mathrm{an}}(\chi)^2 = \prod_{r=0}^{d} \left(\det \Delta_r(\chi)'\right)^{(-1)^r r}. \tag{2.1}$$

Wir wollen die Abhängigkeit des Hodge-Laplace-Operators von der Wahl der Hermiteschen Metrik näher untersuchen. Es seien h_0^χ und h_1^χ zwei Hermitesche Metriken auf E^χ. Wir bezeichnen mit E_i^χ die Hermiteschen Vektorraumbündel (E^χ, h_i^χ). Wir konstruieren wie oben Hilberträume

$$L^2\Lambda^r(X, E_0^\chi) \quad \text{und} \quad L^2\Lambda^r(X, E_1^\chi).$$

Mit h_u^χ bezeichnen wir die Konvexkombination von h_0^χ und h_1^χ:

$$h_u^\chi = h_0^\chi + u(h_1^\chi - h_0^\chi), \qquad 0 \leq u \leq 1.$$

Weiter sei g_v^X eine Familie Riemannscher Metriken auf X. Damit erhalten wir eine Familie von Hodge-Laplace-Operatoren $\Delta_r(\chi; h_u^\chi, g_v^X)$ auf $L^2\Lambda^r(X_v, E_u^\chi)$, wobei $X_v = (X, g_v)$, d.h.,

$$\delta_\chi(u, v) = \pm *_v \circ \sharp_u \circ \mathrm{d}_\chi \circ \sharp_u \circ *_v$$

und

$$\Delta_r(\chi; u, v) = (\mathrm{d}_\chi + \delta_\chi(u, v))^2.$$

Es seien

$$\alpha_u := \sharp_u^{-1} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u} \sharp_u \quad \text{und} \quad \beta_v := *_v^{-1} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}v} *_v .$$

In [Mül93, Theorem 2.6] wird gezeigt, dass für geschlossene Mannigfaltigkeiten ungerader Dimension folgendes gilt:

$$\frac{\partial}{\partial u} \log T^{\mathrm{an}}(\chi; u, v)^2 = \sum_{r=0}^{d} (-1)^r r \mathrm{Tr}(\alpha_u P_{u,v}^{\chi,r}(0)), \tag{2.2}$$

$$\frac{\partial}{\partial v} \log T^{\mathrm{an}}(\chi; u, v)^2 = \sum_{r=0}^{d} (-1)^r r \mathrm{Tr}(\beta_v P_{u,v}^{\chi,r}(0)), \tag{2.3}$$

wobei $P_{u,v}^{\chi,r}(0)$ die Projektion auf $\mathcal{H}^r(\chi; u, v) = \ker(\Delta_r(\chi; u, v))$ ist.
Es sei $\chi\colon \Gamma \to \mathrm{GL}(V_\chi)$ eine *azyklische* endlichdimensionale Darstellung von Γ in einem komplexen Vektorraum V_χ. Dann ist

$$H^*(X; E^\chi) = \{0\}.$$

Aus (2.2) und (2.3) folgt, dass die analytische Torsion $T^{\mathrm{an}}(\chi)^2$ nicht von der Wahl der Hermiteschen Metrik auf E^χ und der Riemannschen Metrik auf X abhängt.

3 Die Selbergsche Spurformel

Es sei X eine geschlossene hyperbolische Mannigfaltigkeit der Dimension $2n + 1$ wie in Abschnitt 1.1. Es sei Δ der Laplace-Operator auf $C^\infty(X)$. Es sei

$$\sigma(\Delta): \quad 0 \leq \mu_1 \leq \mu_2 \leq \cdots \to \infty$$

das Spektrum von Δ und $\{\phi_j\}$ eine orthonormale Basis von $L^2(X)$ aus Eigenfunktionen von Δ. Es sei $N(\Delta; R)$ die Eigenwertzählfunktion von Δ, d.h., $N(R; \Delta) := \#\{\mu \in \sigma(\Delta) \mid |\mu| \leq R\}$. Nach der Weylschen Formel [Shu01, Abschnitt II.13] ist

$$N(R; \Delta) \sim \frac{\mathrm{Vol}(X)}{(4\pi)^{d/2}\Gamma(d/2+1)} R^{d/2}, \qquad R \to \infty. \tag{3.1}$$

Es sei $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Wie in Abschnitt A.1 definieren wir mit Hilfe der Spektralzerlegung von Δ den Operator $f(\Delta)$ durch

$$f(\Delta)\phi := \sum_{j=1}^{\infty} f(\mu_j)\langle \phi_j, \phi\rangle \phi_j, \qquad \phi \in L^2(X).$$

Aus (3.1) folgt: $f(\Delta)$ ist ein Operator der Spurklasse, und die Spur ist gegeben durch

$$\mathrm{Tr}(f(\Delta)) = \sum_{j=1}^{\infty} f(\mu_j),$$

wobei die Reihe auf der rechten Seite absolut konvergiert. Ziel ist es, mit Hilfe der Spurformel diese Spur durch geometrische Daten auszudrücken. Dazu bemerken wir, dass $f(\Delta)$ insbesondere ein Glättungsoperator mit einem C^∞-Kern K_f ist. Eine Argumentation wie im Beweis von Satz A.7 liefert die Aussage

$$K_f(x, y) = \sum_{j=1}^{\infty} f(\mu_j)\phi_j(x) \otimes \phi_j^*(y). \tag{3.2}$$

Wir folgen den Ausführungen auf Seite 78 und erhalten dann

$$\mathrm{Tr} f(\Delta) = \int_X K_f(x, x) \mathrm{d}\mathrm{vol}(x).$$

Später werden wir den Wärmeleitungsoperator $\mathrm{e}^{-t\Delta}$ untersuchen. Seine Spur ist

$$\mathrm{Tr}\, \mathrm{e}^{-t\Delta} = \int_X H(t; x, x) \mathrm{d}\mathrm{vol}(x).$$

In Abschnitt 3.2 werden wir den Wärmeleitungskern $\widetilde{H}$ von $\widetilde{\Delta}$ auf $\widetilde{X}$ konstruieren und zeigen, dass

$$H(t; x, y) = \sum_{\gamma \in \Gamma} \widetilde{H}(t; x, \gamma y).$$

Zur Berechnung von $\mathrm{Tr}\, \mathrm{e}^{-t\Delta}$ wenden wir die Selbergsche Spurformel auf die Funktion $\widetilde{H}(t; x, x)$ an.

3.1 Die Selbergsche Spurformel

Weil G halbeinfach ist, existiert ein invariantes Maß auf G. Es sei $\mathrm{d}g$ ein Haar-Maß auf G. Dieses induziert ein invariantes Maß $\mathrm{d}\dot{g}$ auf $\Gamma\backslash G$:

$$\int_{\Gamma\backslash G}\Big(\sum_{\gamma\in\Gamma} f(\gamma g)\Big)\mathrm{d}\dot{g} = \int_G f(g)\mathrm{d}g, \quad f \in C_c^\infty(G).$$

Es sei

$$\varphi\colon \Gamma \to \mathrm{GL}(V_\varphi)$$

eine *unitäre* Darstellung von Γ in einem endlichdimensionalen Vektorraum V_φ.
Wir betrachten den Hilbertraum

$$L^2(\Gamma\backslash G : \varphi) := \Big\{\psi\colon G \to V_\varphi \mid \forall\gamma \in \Gamma : \psi(\gamma g) = \varphi(\gamma)\psi(g), \int_{\Gamma\backslash G} \|\psi(g)\|_\varphi^2 \mathrm{d}\dot{g} < \infty\Big\},$$

wobei $\|\cdot\|_\varphi$ das Hermitesche Inneresprodukt auf V_φ bezeichnet. Es sei $R_\Gamma := \mathrm{Ind}_\Gamma^G(\varphi)$ die rechtsreguläre Darstellung von G in $L^2(\Gamma\backslash G : \varphi)$, d.h.,

$$R_\Gamma\colon G \to \mathrm{Aut}(L^2(\Gamma\backslash G : \varphi)), \quad (R_\Gamma(g)\psi)(g') = \psi(g'g).$$

Die Darstellung R_Γ kann in folgender Weise interpretiert werden. Es sei F ein Fundamentalbereich von Γ in G. Das heißt, jedes Element $g \in G$ kann man eindeutig darstellen als

$$g = \gamma x,$$

wobei $\gamma \in G$ und $x \in \overline{F}$ bis auf Elemente einer Nullmenge.
Offensichtlich ist jede Funktion $\psi \in L^2(\Gamma\backslash G : \varphi)$ eindeutig durch die Einschränkung auf $\overline{F}$ bestimmt. Umgekehrt kann man jede Funktion auf F zu einer Funktion auf G fortsetzen, die der Bedingung $\psi(\gamma x) = \varphi(\gamma)\varphi(x)$ genügt.
Damit können wir den Hilbertraum $L^2(\Gamma\backslash G : \varphi)$ mit dem Raum der V_φ-wertigen Funktionen auf F identifizieren, für die

$$\int_F \|\psi(x)\|_\varphi^2 \mathrm{d}x < \infty. \tag{3.3}$$

Weil $\varphi\colon \Gamma \to \mathrm{GL}(V_\varphi)$ eine unitäre Darstellung ist, hängt (3.3) nicht von der Wahl eines Fundamentalbereichs von Γ in G ab. In der Tat, für alle $\gamma \in \Gamma$ ist

$$\begin{aligned}\langle\psi(\gamma x), \psi(\gamma x)\rangle_\varphi &= \langle\varphi(\gamma)\psi(x), \varphi(\gamma)\psi(x)\rangle_\varphi \\ &= \langle\psi(x), \psi(x)\rangle_\varphi.\end{aligned}$$

Bezüglich dieser Realisierung von $L^2(\Gamma\backslash G : \varphi)$ ist der Operator R_Γ von der Form

$$(R_\Gamma(g)\psi)(g') = \varphi(\gamma)\psi(x),$$

wobei $\gamma \in \Gamma$ und $x \in F$ definiert ist durch $g'g = \gamma x$.

Bemerkung 3.1. Es sei $\chi\colon \Gamma \to \mathrm{GL}(V_\chi)$ eine nicht unitäre Darstellung von Γ in einem endlichdimensionalen komplexen Vektorraum V_χ. In diesem Fall ist (3.3) nicht wohldefiniert.

Es sei $f \in C_c^\infty(G)$. Wir definieren einen Operator $R_\Gamma(f)$ in $L^2(\Gamma\backslash G : \varphi)$ durch

$$R_\Gamma(f) := \int_G f(g) R_\Gamma(g) \mathrm{d}g. \tag{3.4}$$

Es sei $\psi \in L^2(\Gamma\backslash G : \varphi)$. Dann ist

$$\begin{aligned}(R_\Gamma(f)\psi)(g) &= \int_G f(g)(R_\Gamma(g')\psi)(g)\mathrm{d}g' = \int_G f(g')\psi(gg')\mathrm{d}g' \\ &= \int_G f(g^{-1}g')\psi(g')\mathrm{d}g' = \int_F \Big(\sum_{\gamma\in\Gamma} f(g^{-1}\gamma g')\psi(\gamma g')\Big)\mathrm{d}g' \\ &= \int_F \Big(\sum_{\gamma\in\Gamma} f(g^{-1}\gamma g')(\varphi(\gamma)\psi(g'))\Big)\mathrm{d}g',\end{aligned}$$

wobei F ein Fundamentalbereich von Γ in G ist. Damit ist

$$(R_\Gamma(f)\psi)(g) = \int_{\Gamma\backslash G} K_f^\varphi(g, g')\psi(g')\mathrm{d}\dot{g}',$$

wobei

$$K_f^\varphi(g, g') := \sum_{\gamma\in\Gamma} f(g^{-1}\gamma g')\varphi(\gamma). \tag{3.5}$$

Bemerkung 3.2. Für $f \in L^1(G)$ können wir den Operator $R_\Gamma(f)$ wie in (3.4) definieren. Aus $\|R_\Gamma(f)\| < C\|f\|_{L^1}$ folgt, dass dieser Operator stetig ist.

Weil f einen kompakten Träger hat, konvergiert Reihe (3.5) in der C^∞-Topologie auf kompakten Teilmengen. Damit ist $R_\Gamma(f)$ ein Integraloperator mit C^∞-Kern $K_f^\varphi(g, g')$. Daraus folgt, dass $R_\Gamma(f)$ ein Operator der Spurklasse ist und

$$\mathrm{Tr} R_\Gamma(f) = \int_{\Gamma\backslash G} \mathrm{tr}\, K_f^\varphi(g, g)\mathrm{d}\dot{g}. \tag{3.6}$$

Es sei $\{\gamma\}$ die Konjugationsklasse von $\gamma \in \Gamma$. Dann ist $\mathrm{tr}\,\varphi(\gamma)$ konstant für alle Element γ aus der Konjugationsklasse $\{\gamma\}$. Damit können wir die linke Seite von (3.6) schreiben als

$$\sum_{\{\gamma\}} \mathrm{tr}\,\varphi(\gamma) \int_F \Big(\sum_{\gamma'\in\{\gamma\}} f(g^{-1}\gamma' g)\Big)\mathrm{d}g,$$

wobei die äußere Summe über die Menge der Konjugationsklassen von $\gamma \in \Gamma$ gebildet wird.

Es sei $\gamma \in \Gamma$. Wir betrachten die Konjugationsklasse $\{\gamma\}$. Diese Klasse besteht aus Elementen der Menge

$$\{\gamma' = \alpha^{-1}\gamma\alpha \mid \alpha \in \Gamma\}.$$

Es sei Γ_γ der Zentralisator von γ in Γ. Für γ_i aus der Rechtsnebenklasse von Γ bezüglich Γ_γ wird jedes Element γ' aus Konjugationsklasse $\{\gamma\}$ nur einmal getroffen. Damit erhalten wir

$$\sum_{\gamma'\in\{\gamma\}} f(g^{-1}\gamma' g) = \sum_{\alpha\in\Gamma_\gamma\backslash\Gamma} f(g^{-1}\alpha^{-1}\gamma\alpha g).$$

Daraus folgt

$$\int_F \Big(\sum_{\gamma'\in\{\gamma\}} f(g^{-1}\gamma' g)\Big)\mathrm{d}g = \int_{F_1} f(g^{-1}\gamma g)\mathrm{d}g,$$

wobei $F_1 = \sum_{\alpha\in\Gamma_\gamma\backslash\Gamma}\alpha F$ ein Fundamentalbereich von Γ_γ in G ist. Also ist

$$\int_F \Big(\sum_{\gamma'\in\{\gamma\}} f(g^{-1}\gamma' g)\Big)\mathrm{d}g = \int_{\Gamma_\gamma\backslash G} f(g^{-1}\gamma g)\mathrm{d}\dot{g}.$$

Es sei G_γ der Zentralisator von γ in G. Dann ist

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma_\gamma\backslash G} f(g^{-1}\gamma g)\mathrm{d}\dot{g} &= \int_{G_\gamma\backslash G}\int_{\Gamma_\gamma\backslash G_\gamma} f(g^{-1}g'^{-1}\gamma g' g)\mathrm{d}\dot{g}'\mathrm{d}g\\ &= \int_{G_\gamma\backslash G}\int_{\Gamma_\gamma\backslash G_\gamma} f(g^{-1}\gamma g)\mathrm{d}\dot{g}'\mathrm{d}g\\ &= \mathrm{Vol}(\Gamma_\gamma\backslash G_\gamma)\int_{G_\gamma\backslash G} f(g^{-1}\gamma g)\mathrm{d}g.\end{aligned}$$

Damit ist Spurformel (3.6) äquivalent zu

$$\mathrm{Tr}R_\Gamma(f) = \sum_{\{\gamma\}} \mathrm{tr}\,\varphi(\gamma)\,\mathrm{Vol}(\Gamma_\gamma\backslash G_\gamma)\int_{G_\gamma\backslash G} f(g^{-1}\gamma g)\mathrm{d}g. \tag{3.7}$$

Weil $\Gamma\backslash G$ kompakt ist, sind alle Elemente γ aus Γ halbeinfach, siehe [Rag72]. Aus der Annahme Γ hat keine Elemente endlicher Ordnung, also Γ ist torsionsfrei, folgt, dass alle Elemente $\gamma \neq e$ aus Γ hyperbolisch sind. In Abschnitt 1.1 haben wir festgestellt, dass jedes hyperbolische Element γ zu $m_\gamma a_\gamma \in MA$ konjugiert ist. Ferner ist jedes Element $m \in M$ konjugiert zu t im maximalen Torus T von M. Damit ist $\gamma \neq e$ konjugiert zu $t_\gamma a_\gamma \in TA$ also einem Element in einer θ-stabilen Cartan-Untergruppe von G. Daraus folgt $H \subset G_\gamma$. Ferner folgt damit, dass $G_\gamma \subset MA$.

Lemma 3.3. *Für alle $\gamma \neq e$ aus Γ ist Γ_γ isomorph zu $\mathbb{Z}$.*

Beweis. Nach Voraussetzungen an Γ folgt, dass γ hyperbolisch ist. Auf Grund der Diskussion in Abschnitt 1 können wir ohne Einschränkung annehmen $\gamma = m_\gamma a_\gamma \in MA$. Es seien $\gamma', \gamma'' \in \Gamma_\gamma$. Weil $G_\gamma \subset MA$, können wir annehmen, dass $\gamma' = m'_\gamma a'_\gamma$ und $\gamma'' = m''_\gamma a''_\gamma$ aus MA sind. Weil m'_γ mit γ kommutiert, folgt $m'_\gamma \in M_\gamma = G_\gamma \cap M$. Damit ist $\gamma'(\gamma'')^{-1} = m'_\gamma(m''_\gamma)^{-1}a'_\gamma(a''_\gamma)^{-1}$. Daraus folgt, dass die Menge $\{a'_\gamma \mid \gamma' \in \Gamma_\gamma\}$ eine Untergruppe von A bildet. Offensichtlich ist sie eine diskrete Untergruppe und ist als solche isomorph zu $\mathbb{Z}$. Es sei a_{γ_0} ein Erzeuger dieser Untergruppe. Es sei $\gamma_0 \in \Gamma_\gamma$, so dass

$\gamma_0 = m_{\gamma_0} a_{\gamma_0}$. Dann ist γ_0 ein Erzeuger von Γ_γ. Zum Beweis dieser Aussage betrachten wir $\gamma' \in \Gamma_\gamma$. Dann ist $a'_\gamma = a^j_{\gamma_0}$ für ein $j \in \mathbb{Z}$. Damit müssen wir zeigen, dass $\gamma' = \gamma_0^j$. In der Tat, folgt aus $\gamma'\gamma_0^{-j} = m'_\gamma m^{-j}_{\gamma_0} \in \Gamma \cap K$ aus der Voraussetzung, dass Γ torsionsfrei ist, dass $\gamma'\gamma_0^{-j} = e$ ist. Somit erhalten wir die Behauptung. □

Ein Element $\gamma \neq e$ aus Γ heißt primitiv, wenn es ein Erzeuger von Γ_γ ist. Offensichtlich kann jedes Element $\gamma \in \Gamma_\gamma$ als $\gamma_0^{\mu(\gamma)}$ mit $\mu(\gamma) \geq 1$ geschrieben werden, wobei γ_0 primitiv ist. Wir nennen $\mu(\gamma)$ die Multiplizität von γ.
Als nächstes berechnen wir $\mathrm{Vol}(\Gamma_\gamma \backslash G_\gamma)$. Wie oben nehmen wir an $\gamma = m_\gamma a_\gamma \in MA$. Dann ist $G_\gamma \subset MA$. Vielmehr ist $G_\gamma = M_\gamma A$, wobei $M_\gamma = M \cap G_\gamma$. Nach Definition kommutiert M_γ mit γ und a_γ. Also kommutiert M_γ auch mit m_γ. Daraus folgt, dass m_γ mit G_γ kommutiert. Also wirkt m_γ trivial auf G_γ/K_γ. Damit ist die Wirkung von γ auf G_γ/K_γ durch die Wirkung von a_γ beschrieben. Aus $K_\gamma = K \cap G_\gamma = M_\gamma$ und $G_\gamma = M_\gamma A$ folgt schließlich, dass die Wirkung von Γ_γ auf G_γ/K_γ mit der Wirkung von $\{a^j_{\gamma_0} \mid j \in \mathbb{Z}\}$ auf $A \cong G_\gamma/K_\gamma$ durch die Linkstranslation identisch ist. Damit ist

$$\mathrm{Vol}(\Gamma_\gamma \backslash G_\gamma) = \mathrm{Vol}(A/\{a^j_{\gamma_0} \mid j \in \mathbb{Z}\}).$$

Das Volumen auf der rechten Seite entspricht der Länge $\ell(\gamma_0)$ von a_{γ_0}. Es sei $\mu(\gamma)$ die Multiplizität von γ. Dann ist

$$\mathrm{Vol}(\Gamma_\gamma \backslash G_\gamma) = \ell(\gamma_0) = \frac{\ell(\gamma)}{\mu(\gamma)}.$$

Damit ist jeder Summand auf der rechten Seite von (3.7) von der folgenden Form:

$$\operatorname{tr}\varphi(\gamma)\,\mathrm{Vol}(\Gamma_\gamma \backslash G_\gamma) \int_{G_\gamma \backslash G} f(g^{-1}\gamma g)\mathrm{d}g = \ell(\gamma_0)\operatorname{tr}\varphi(\gamma) \int_{MA\backslash G} f(g^{-1}\gamma g)\mathrm{d}g.$$

Es sei

$$F_f(ma_u) := \mathrm{e}^{\rho u} \iint_{K\times N} f(kmank^{-1})\mathrm{d}n\mathrm{d}k,$$

wobei $\mathrm{d}n$ durch (1.3) bestimmt ist. Nach Satz 7.7.10 in [Wal73] ist

$$\int_{G/A} f(gmag^{-1})\mathrm{d}\dot{g} = \frac{\mathrm{e}^{-\rho u}}{\det(\mathrm{Id} - \mathrm{Ad}(ma_u)_{\bar{\mathfrak{n}}})} F_f(ma_u),$$

wobei $\mathrm{d}\dot{g}$ auf G/A durch $\int_G f(g)\mathrm{d}g = \int_{G/A}\int_{\mathbb{R}} f(g\exp(uH_{\mathbb{R}}))\mathrm{d}u\mathrm{d}\dot{g}$ definiert ist. Weil alle $\gamma \neq e$ hyperbolisch sind, erhalten wir

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}R_\Gamma(f) &= \dim(V_\varphi)\,\mathrm{Vol}(X) f(e)\\ &\quad + \sum_{\{\gamma\}\neq\{e\}} \operatorname{tr}\varphi(\gamma)\ell(\gamma_0)\frac{\mathrm{e}^{-\rho\ell(\gamma)}}{\det(\mathrm{Id} - \mathrm{Ad}(m_\gamma a_\gamma)_{\bar{\mathfrak{n}}})} F_f(m_\gamma a_\gamma).\end{aligned} \tag{3.8}$$

Es sei $B = MAN$ die standard parabolische Untergruppe von G. Es seien (ξ, W_ξ) eine unitäre irreduzible Darstellung von M und $\mathrm{e}^{i\lambda}$ ein Charakter von A mit $\lambda \in \mathbb{R}$. Wie üblich definieren wir die Darstellung der Hauptreihe $\pi_{\xi,\lambda} = \mathrm{Ind}_B^G(\xi \otimes \mathrm{e}^{i\lambda} \otimes \mathbb{1})$ im Hilbertraum

$$H_{\xi,\lambda} := \left\{\phi\colon G \to W_\xi \mid \phi(ma_u ng) = \mathrm{e}^{(i\lambda+\rho)u}\,\xi(m)\phi(g),\ \int_K \|\phi(k)\|_\xi^2 \mathrm{d}k < \infty\right\}$$

durch $\pi_{\xi,\lambda}(g)\phi(g') = \phi(g'g)$.
Für $f \in C_c^\infty(G)$ sei

$$\pi_{\xi,\lambda}(f) = \int_G f(g)\pi_{\xi,\lambda}(g)\mathrm{d}g.$$

Es ist ein tiefes Resultat von Harish-Chandra [HC65], wonach $\pi_{\xi,\lambda}(f)$ ein Operator der Spurklasse ist. Wir definieren die *Fourier-Transformierte* von f durch

$$\widehat{f}(\xi, \lambda) = \mathrm{Tr}\pi_{\xi,\lambda}(f).$$

Die Fourier-Transformation kann auf eine größere Klasse von Funktionen erweitert werden. In [Art89] wird gezeigt, dass für $f \in C^2(G)$ der Operator $\pi_{\xi,\lambda}(f)$ ein Operator der Spurklasse ist, wobei $C^2(G)$ Harish-Chandra's L^2-Schwartz-Raum. In dieser Arbeit beweist Arthur, dass die Fouriertransformation einen Isomorphismus von $C^2(G)$ in $C^2(\widehat{G})$ bildet, wobei $\widehat{G}$ die Menge der Äquivalenzklassen unitärer irreduzibler Darstellungen von G ist. Für $G = \mathrm{SO}_e(2n+1, 1)$ wird die Menge $\widehat{G}$ durch $\widehat{M} \times \mathbb{R}$ parametrisiert. Das heißt, dass G nur Darstellungen der Hauptreihe besitzt, die wir durch die induzierte Darstellung $\pi_{\xi,\lambda} = \mathrm{Ind}_M^G(\xi \otimes \mathrm{e}^{ic\lambda} \otimes \mathbb{1})$ in $H_{\xi,\lambda}$ realisieren.

Bemerkung. Weil G keine Darstellung der diskreten Reihe hat, ist das Plancherel-Maß $\mathrm{d}\mu_{\xi,\lambda}$ von $\pi_{\xi,\lambda}$ ein Polynom, das Plancherel-Polynom

$$P(i\lambda;\xi) = \dim(W_\xi) \prod_{\alpha\in\Delta_A^+} (\Lambda_\xi + \rho_{\mathfrak{m}} + i\lambda, H_\alpha), \quad (H_\alpha = \alpha^*)$$

wobei Λ_ξ das höchste Gewicht der irreduziblen Darstellung $\xi\colon M \to \mathrm{GL}(W_\xi)$ bezeichnet. Ferner ist $\rho_{\mathfrak{m}} = \frac{1}{2}\sum_{\alpha>0}\alpha$, wobei die Summe über positive Wurzeln von M gebildet wird, siehe Abschnitt 4.1. Daraus folgt, dass das Plancherel-Polynom $P(i\lambda;\xi)$ von der folgenden Form ist

$$\sum_{j=0}^{n}(-1)^j a_j(\xi)\lambda^{2j},$$

mit geeigneten $a_j(\xi)$, siehe auch [Mia79, Seite 264].

Durch die stetige Fortsetzung der Fourier-Transformation von $C^2(G)$ auf den topologisch dualen Raum $C^2(G)'$ erhält man Harish-Chandra's Plancherel-Theorem. Dazu bemerken wir, dass für $C^2(G)$ folgendes gilt:

$$C^2(G) \subset L^2(G) \subset C^2(G)'.$$

Die Fourier-Transformierte $\widehat{f}(\xi, \lambda)$ von f können wir mittels F_f berechnen:

$$\widehat{f}(\xi, \lambda) = \int_M \int_{\mathbb{R}} F_f(ma_u)\, \mathrm{tr}\, \overline{\xi(m)}\, \mathrm{e}^{-i\lambda u}\, \mathrm{d}u\mathrm{d}m,$$

siehe [Wal73, Theorem 8.8.2]. Aus dem Peter-Weyl-Theorem und der inversen Fourier-Transformation auf $\mathbb{R}$ folgt

$$F_f(ma_u) = \frac{1}{2\pi} \sum_{\xi \in \widehat{M}} \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\xi, \lambda)\, \mathrm{e}^{i\lambda u}\, \mathrm{tr}\, \xi(m) \mathrm{d}u.$$

Dann erhalten wir aus (3.8) folgendes Theorem, die Selbergsche Spurformel:

Theorem 3.4. *Es sei f eine K-endliche Funktion in $C^1(G)$. Dann gilt:*

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr} R_\Gamma(f) = \mathrm{Vol}(X) \dim(V_\varphi) f(e) + \frac{1}{2\pi} \sum_{\{\gamma\} \neq \{e\}} \ell(\gamma_0) \frac{\mathrm{tr}\, \varphi(\gamma)\, \mathrm{e}^{-\rho \ell(\gamma)}}{\det(\mathrm{Id} - \mathrm{Ad}(m_\gamma a_\gamma)_{\overline{\mathfrak{n}}})} \\ \cdot \sum_{\xi \in \widehat{M}} \mathrm{tr}\, \xi(m_\gamma) \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\xi, \lambda) \cdot \mathrm{e}^{i\ell(\gamma)\lambda}\, \mathrm{d}\lambda. \end{aligned} \tag{3.9}$$

Beweis. Siehe Theorem 6.7 in [Wal76] für $f \in C_c^\infty(G)$.
Für $f \in L^1(G)$ existiert zwar der Operator $R_\Gamma(f)$ in $L^2(\Gamma\backslash G : \varphi)$, ist jedoch im Allgemeinen kein Operator der Spurklasse. Wir bemerken, dass die Spurformel gilt, wenn die Reihe $\sum_{\gamma \in \Gamma} f(g^{-1}\gamma g')\varphi(\gamma)$ auf kompakten Mengen gleichmäßig in der C^l-Topologie konvergiert, wobei l hinreichend groß ist. Dann ist $R_\Gamma(f)$ ein Integraloperator mit C^l-Kern $K_f^\varphi(g, g') = \sum_{\gamma \in \Gamma} f(g^{-1}\gamma g')\varphi(\gamma)$. Wenn der Regularitätsindex l von K_f^φ größer ist als die Dimension von $\Gamma\backslash G$, dann ist $R_\Gamma(f)$ ein Operator der Spurklasse und

$$\mathrm{Tr} R_\Gamma(f) = \int_{\Gamma\backslash G} K_f^\varphi(g, g) \mathrm{d}g.$$

Für $f \in C^1(G)$ ist diese Bedingung erfüllt, siehe [Mia80]. Die Voraussetzung K-endlich wird benötigt, damit die Summe über $\xi \in \widehat{M}$ endlich ist. Für die Einzelheiten siehe Abschnitt 2 in [Mia80]. □

Bemerkung. Eine glatte Funktion f auf G heißt K-endlich, wenn die links und die rechts K-Translationen von f: $\{l_k(f) \mid k \in K\}$ und $\{r_k(f) \mid k \in K\}$ einen endlichdimensionalen Unterraum in $C^\infty(G)$ aufspannen. Man kann zeigen [Mia80, Lemma 2.4], dass eine Funktion f genau dann K-endlich ist, wenn endlichdimensionale Darstellungen (σ_j, V_{σ_j}), $1 \leq j \leq q$ von K existieren, so dass

$$f = \sum_{j=1}^{q} \dim(V_{\sigma_j})\, \mathrm{tr}\, \sigma_j * f,$$

wobei die Faltung von $\chi_j = \mathrm{tr}\, \sigma_j$ und f wie folgt definiert ist

$$\chi_j * f(g) = \int_K \chi_j(k) f(k^{-1}g) \mathrm{d}k.$$

Daraus folgt, dass die Voraussetzung K-endlich von $K \times K$-invarianten Funktionen $f \in C^\infty(G) \otimes \mathrm{End}(V_\sigma)$, wobei σ eine endlichdimensionale Darstellung von K ist, erfüllt wird.

3.2 Wärmeleitungskerne auf der universellen Überlagerung

Ziel dieses Abschnitts ist es mit Hilfe des Wärmeleitungskerns auf der universellen Überlagerung $\widetilde{X}$ von X den Wärmeleitungsoperator auf X zu konstruieren, um darauf die Selbergsche Spurformel anwenden zu können.
Wir rekapitulieren zunächst einige bekannte Fakten über die lokal invarianten Differentialoperatoren, siehe [BM83] für eine detailliertere Diskusion. Es sei $\sigma\colon K \to \mathrm{GL}(V_\sigma)$ eine unitäre Darstellung. Mit $\widetilde{E}^\sigma$ bezeichnen wir das zu σ assoziierte homogene Vektorraumbündel über $\widetilde{X}$. Der Raum $C^\infty(\widetilde{E}^\sigma)$ bzw. $C_c^\infty(\widetilde{E}^\sigma)$ der C^∞-Schnitte bzw. C^∞-Schnitte mit kompaktem Träger von $\widetilde{E}^\sigma$ wird mit dem K-invarianten Teilraum $(C^\infty(G)\otimes V_\sigma)^K$ bzw. $(C_c^\infty(G)\otimes V_\sigma)^K$ von $C^\infty(G)\otimes V_\sigma$ bzw. $C_c^\infty(G)\otimes V_\sigma$ identifiziert, wobei die Wirkung von K durch $k \mapsto R(k)\otimes\sigma(k)$ definiert ist. Hierbei bezeichnet R die rechtsreguläre Darstellung von G.
Es sei $(\cdot\,,\cdot)_\sigma$ eine K-invariante Hermitesche Form auf V_σ. Diese induziert eine G-invariante Hermitesche Fasermetrik auf $\widetilde{E}^\sigma$. Mit $L^2(\widetilde{E}^\sigma)$ bezeichnen wir den Hilbertraum der L^2-Schnitte von $\widetilde{E}^\sigma$. Dann identifizieren wir wie oben

$$L^2(\widetilde{E}^\sigma) \cong (L^2(G)\otimes V_\sigma)^K. \tag{3.10}$$

Das homogene Vektorraumbündel $\widetilde{E}^\sigma$ über $\widetilde{X}$ induziert ein lokal homogenes Vektorraumbündel $E^\sigma = \Gamma\backslash\widetilde{E}^\sigma$ über $X = \Gamma\backslash\widetilde{X}$. Wie eben identifizieren wir den Raum der C^∞-Schnitte $C^\infty(E^\sigma)$ mit dem K-invarianten Unterraum $(C^\infty(\Gamma\backslash G)\otimes V_\sigma)^K$ von $C^\infty(\Gamma\backslash G)\otimes V_\sigma$ bezüglich der Darstellung $R_\Gamma\otimes\sigma$, wobei R_Γ die rechtsreguläre Darstellung von G in $C^\infty(\Gamma\backslash G)$ bezeichnet. Analoges gilt für den Raum $L^2(E^\sigma)$ der L^2-Schnitte von E^σ. Im Folgenden werden wir Schnitte von E^σ mit Abbildungen $\phi\colon \Gamma\backslash G \to V_\sigma$ identifizieren, die folgender Bedingung genügen

$$\phi(gk) = \sigma(k)^{-1}\phi(g).$$

Es seien $\mathfrak{g}_\mathbb{C}$ die Komplexifizierung von $\mathfrak{g}$ und $U(\mathfrak{g}_\mathbb{C})$ die universelle einhüllende Algebra von $\mathfrak{g}_\mathbb{C}$. Mit $Z(\mathfrak{g}_\mathbb{C})$ bezeichnen wir das Zentrum von $U(\mathfrak{g}_\mathbb{C})$. Es seien σ, σ' zwei endlichdimensionale unitäre Darstellungen von K in V_σ bzw. $V_{\sigma'}$. Es sei $(U(\mathfrak{g}_\mathbb{C})\otimes\mathrm{Hom}(V_{\sigma_1}, V_{\sigma_2}))^K$ der Unterraum der Elemente von $U(\mathfrak{g}_\mathbb{C})\otimes\mathrm{Hom}(V_\sigma, V_{\sigma'})$, die invariant bezüglich der Darstellung $k \mapsto \mathrm{Ad}(k)\otimes(\sigma(k^{-1})\otimes\sigma'(k))$ von K sind. Wir ordnen $Z = \sum_i X_i\otimes A_i \in (U(\mathfrak{g}_\mathbb{C})\otimes\mathrm{Hom}(V_\sigma, V_{\sigma'}))^K$ ein $\widetilde{D}$ wie folgt zu:

$$\widetilde{D} = \sum_i R(X_i)\otimes A_i.$$

Diese Formel definiert einen Differentialoperator $\widetilde{D}\colon C_c^\infty(\widetilde{E}^\sigma) \to C_c^\infty(\widetilde{E}^{\sigma'})$, der mit der Wirkung von G kommutiert. Umgekehrt entsteht jeder G-invariante Differentialoperator von $C_c^\infty(\widetilde{E}^\sigma)$ auf $C_c^\infty(\widetilde{E}^{\sigma'})$ auf diese Weise. Weil der Differentialoperator $\widetilde{D}$ mit der Wirkung von G kommutiert, definiert er einen Differentialoperator

$$D\colon C^\infty(E^\sigma) \to C^\infty(E^{\sigma'}).$$

Das ist der zu Z assoziierte lokal invariante Differentialoperator.

Zum Abschluss erinnern wir an die Definition Harish-Chandra's Schwartz-Raum $C^p(G)$ für $p > 0$ von schnell fallenden L^p-integrierbaren Funktionen. Es sei δ der geodätische Abstand von $x = gK$ und $x_0 = eK$ in G/K wie in (1.2) definiert. Für alle $g \in G$ bezüglich der Iwasawa-Zerlegung ka_un definieren wir $H_{\mathbb{R}}(g) := u$. Es sei Ξ die spärische Funktion auf G

$$\Xi(g) = \int_K \mathrm{e}^{-\rho H_{\mathbb{R}}(kg)}\,\mathrm{d}k.$$

Es sei V_σ ein K-Modul. Dann ist $C^p(G) \otimes V_\sigma$ der Raum der Funktionen $f \in C^\infty(G) \otimes V_\sigma$, so dass

$$\sup_{g \in G} \Big((1 + \delta(g))^r \Xi(g)^{-2/p} \|R(Y) L(Y') f(g)\| \Big) < \infty$$

für alle $r > 0$ und alle $Y, Y' \in U(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$. Dabei bezeichnet $R(Y)$ bzw. $L(Y)$ den durch $Y \in U(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ induzierten links bzw. rechts invarianten Differentialoperator auf G. Wir bemerken, dass $C^1(G)$ in $L^1(G)$ enthalten ist, was aus [War72b, Proposition 8.3.7.5] folgt.

Es sei $\widetilde{E}^\sigma$ ein homogenes Hermitesches Vektorraumbündel über $\widetilde{X}$, das durch eine unitäre Darstellung σ von K auf einem komplexen Vektorraum definiert wird.
Es seien $\psi \in C^\infty(\widetilde{E}^\sigma)$, $Y \in \mathfrak{p}$ und $\pi \colon G \to G/K$ die kanonische Projektion. Der kanonische Zusammenhang $\widetilde{\nabla}^\sigma$ auf $\widetilde{E}^\sigma$ ist definiert durch

$$\widetilde{\nabla}^\sigma_{\pi_*(g)(Y)} \psi = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0} (g \exp(tY))^{-1} \psi(g \exp(tY) K),$$

wobei $\pi_*(g)$ das Differential von π in $g \in G$ ist. Wir betrachten den Bochner-Laplace-Operator

$$\widetilde{\Delta}_\sigma = \widetilde{\nabla}^{\sigma *} \widetilde{\nabla}^\sigma \colon C_c^\infty(\widetilde{E}^\sigma) \to L^2(\widetilde{E}^\sigma).$$

Aus der Identifikation (3.10) erhalten wir, siehe [Mia80, Proposition 1.1]

$$\widetilde{\Delta}_\sigma = -R(\Omega) \otimes \mathrm{Id} + \mathrm{Id} \otimes \sigma(\Omega_K), \tag{3.11}$$

wobei Ω das Casimir-Element von G und Ω_K das Casimir-Element von K ist. Wenn σ irreduzibel ist, existiert nach dem Lemma von Schur ein $\lambda_\sigma \in \mathbb{R}$, so dass $\sigma(\Omega_K) = \lambda_\sigma \mathrm{Id}$. Es gilt sogar $\lambda_\sigma \geq 0$, siehe [Wal73, Lemma 5.6.4]. Damit folgt aus (3.11)

$$\widetilde{\Delta}_\sigma = -R(\Omega) \otimes \mathrm{Id} + \lambda_\sigma \mathrm{Id}\,. \tag{3.12}$$

Der Operator $\widetilde{\Delta}_\sigma$ ist ein formal selbstadjungierter elliptischer Differentialoperator zweiter Ordnung. Aus [Che73] folgt, dass der Bochner-Laplace-Operator $\widetilde{\Delta}_\sigma$ wesentlich selbstadjungiert ist. Seine selbstadjungierte Fortsetzung wollen wir ebenfalls mit $\widetilde{\Delta}_\sigma$ bezeichen. Dann ist $\widetilde{\Delta}_\sigma \geq 0$. Es sei

$$\mathrm{e}^{-t\widetilde{\Delta}_\sigma} \colon L^2(\widetilde{E}^\sigma) \to L^2(\widetilde{E}^\sigma)$$

der Wärmeleitungsoperator. Er ist ein Glättungsoperator für alle $t > 0$, d.h., ein Integraloperator mit einem C^∞-Kern

$$\mathrm{e}^{-t\widetilde{\Delta}_\sigma} \psi(x) = \int_{\widetilde{X}} \widetilde{H}^\sigma(t; x, y) \psi(y) \mathrm{d}\mathrm{vol}(y),$$

wobei $\widetilde{H}^{\sigma}(t;x,y)$ der Wärmeleitungskern von $\widetilde{\Delta}_{\sigma}$ ist.
Weil $\widetilde{\Delta}_{\sigma}$ ein invarianter Differentialoperator ist, kommutiert $\mathrm{e}^{-t\widetilde{\Delta}_{\sigma}}$ mit der rechtsregulären Darstellung von G auf $(L^2(G)\otimes V_{\sigma})^K$. Damit erhält man, siehe [Mil78],

$$\mathrm{e}^{-t\widetilde{\Delta}_{\sigma}}\,\phi(g) = \int_G \widetilde{H}^{\sigma}_t(g^{-1}g')\phi(g')\mathrm{d}g' \tag{3.13}$$

mit $\phi \in (L^2(G)\otimes V_{\sigma})^K$, wobei $\widetilde{H}^{\sigma}_t\colon G \to \mathrm{End}(V_{\sigma})$ eine glatte L^2-Abbildung ist, die folgender Äquivarianz-Bedingung genügt

$$\widetilde{H}^{\sigma}_t(g) = \sigma(k)\widetilde{H}^{\sigma}_t(k^{-1}gk')\sigma(k')^{-1}, \tag{3.14}$$

für alle $g \in G$ und alle $k,k' \in K$. Um den Wärmeleitungskern von $\widetilde{\Delta}_{\sigma}$ abzuschätzen, folgen wir der Arbeit von Barbach/Moscovici [BM83], in der $\widetilde{H}^{\sigma}_t$ durch den Wärmeleitungskern p_t von G ausgedrückt wird. Es seien $\{X_i\}$ eine orthonormale Basis von $\mathfrak{p}$ bezüglich $B\restriction_{\mathfrak{p}\times\mathfrak{p}}$ und $\{Y_j\}$ eine orthonormale Basis von $\mathfrak{k}$ bezüglich $-B\restriction_{\mathfrak{k}\times\mathfrak{k}}$. Dann ist

$$\Omega = \sum_i X_i^2 - \sum_j Y_j^2 \quad \text{und} \quad \Omega_K = -\sum_j Y_j^2.$$

Es sei

$$P = -\Omega + 2\Omega_K = -\sum_i X_i^2 - \sum_j Y_j^2 \in U(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}).$$

Dann ist $R(P)$ der Laplace-Operator Δ_G von G bezüglich der linksinvarianten Metrik die durch $\langle Y,Y'\rangle_{\theta} = -B(Y,\theta(Y'))$ induziert wird, wobei B die Killing-Form von $\mathfrak{g}$ ist. Der Wärmeleitungsoperator $\mathrm{e}^{-t\Delta_G}$ auf $L^2(G)$ ist ein Glättungsoperator, d.h., es existiert $p_t \in C^{\infty}(G)\cap L^2(G)$, so dass

$$\mathrm{e}^{-t\Delta_G}\,f(g) = \int_G p_t(g^{-1}g_1)f(g_1)\mathrm{d}g_1, \qquad f \in L^2(G). \tag{3.15}$$

Nach Nelson [Nel59, Abschnitt 8] ist p_t sogar in $L^1(G)$. Somit können wir (3.15) auch schreiben als

$$\mathrm{e}^{-t\Delta_G} = R(p_t).$$

Es sei weiter

$$Q_{\sigma} = \int_K R(k)\otimes\sigma(k)\mathrm{d}k$$

die orthogonale Projektion von $L^2(G)\otimes V_{\sigma}$ auf seinen K-invarianten Teilraum, d.h., auf $(L^2(G)\otimes V_{\sigma})^K$. Aus (3.12) und (3.2) erhalten wir

$$\begin{aligned}\widetilde{\Delta}_{\sigma} &= -Q_{\sigma}(R(\Omega)\otimes\mathrm{Id}_{\sigma})Q_{\sigma} + \lambda_{\sigma}\,\mathrm{Id}\otimes\mathrm{Id}_{\sigma}\\ &= Q_{\sigma}(R(P)\otimes\mathrm{Id}_{\sigma})Q_{\sigma} - 2Q_{\sigma}(R(\Omega_K)\otimes\mathrm{Id}_{\sigma})Q_{\sigma} + \lambda_{\sigma}\,\mathrm{Id}\otimes\mathrm{Id}_{\sigma}\\ &= Q_{\sigma}(\Delta_G\otimes\mathrm{Id}_{\sigma})Q_{\sigma} - \lambda_{\sigma}\,\mathrm{Id}\otimes\mathrm{Id}_{\sigma}\,.\end{aligned}$$

Deshalb ist

$$\mathrm{e}^{-t\widetilde{\Delta}_{\sigma}} = Q_{\sigma}(\mathrm{e}^{-t\Delta_G}\otimes\mathrm{Id})Q_{\sigma}\cdot\mathrm{e}^{t\lambda_{\sigma}}\,. \tag{3.16}$$

Aus (3.13) und (3.15) folgt

$$\widetilde{H}_t^\sigma(g) = \mathrm{e}^{t\lambda_\sigma} \iint_{K\times K} p_t(k^{-1}gk')\sigma(kk'^{-1})\mathrm{d}k\,\mathrm{d}k'. \tag{3.17}$$

Damit haben wir den Wärmeleitungskern von $\widetilde{\Delta}_\sigma$ durch p_t beschrieben.
Aus $p_t \in L^1(G)$ folgt sofort, dass

$$\widetilde{H}_t^\sigma \in (L^1(G) \otimes \mathrm{End}(V_\sigma))^{K\times K}. \tag{3.18}$$

Damit ist

$$\mathrm{e}^{-t\widetilde{\Delta}_\sigma} = R(\widetilde{H}_t^\sigma).$$

Aus (3.17) erhält man den folgenden Satz.

Satz 3.5. *Für alle $p > 0$*

$$\widetilde{H}_t^\sigma \in (C^p(G) \otimes \mathrm{End}(V_\sigma))^{K\times K}, \quad t > 0, \tag{3.19}$$

wobei $C^p(G)$ Harish-Chandra's L^p-Schwartz-Raum ist.

Beweis. Siehe Proposition 2.4 in [BM83]. □

Nach (3.17) können wir $\widetilde{H}_t^\sigma$ durch p_t abschätzen. Um Abschätzungen von p_t zu bekommen, benutzen wir das folgende Resultat von Borel [Bor63], wonach jede reelle halbeinfache Liesche Gruppe eine diskrete torsionsfreie kokompkate Untergruppe Γ hat. Das heißt, es existiert eine Untergruppe Γ von G, so dass $\Gamma\backslash G$ eine kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeit ist.
Auf Riemannschen Mannigfaltigkeiten, auf denen eine Isometriegruppe eigentlich diskontinuierlich wirkt, so dass der Quotient kompakt ist, konstruiert Donnelly [Don79] eine Fundamentallösung der Wärmeleitungsgleichung, die eindeutig durch die Eigenschaften P1)–P4) bestimmt ist. Es sei $E(t; g, g')$ die nach Donnelly [Don79, Seite 488] konstruierte Fundamentallösung von der Wärmeleitungsgleichung $\frac{\partial}{\partial t} + \Delta_G$. Nach Donnelly gilt insbesondere: Für alle $0 < t \leq T$ existiert $C > 0$, so dass

$$\Big\| \frac{\partial^i}{\partial t^i} \nabla_g^j \nabla_{g'}^k E(t; g, g') \Big\| \leq C t^{-N/2-i-j-k} \exp\Big(-\frac{d_G^2(g, g')}{4t} \Big),$$

für $i, j, k \in \mathbb{N}$, wobei N die Dimension von G und $d_G(g, g')$ der geodätische Abstand von $g, g' \in G$ bezüglich der linksinvarianten Metrik auf G ist. Weil der Kern von $\mathrm{e}^{-t\Delta_G}$ eindeutig bestimmt ist, können wir $E(t; g, g')$ wie oben mit p_t identifizieren, d.h.,

$$p_t(g^{-1}g') = E(t; g, g').$$

Für p_t folgt daraus

$$\Big\| \frac{\partial^i}{\partial t^i} \nabla_g^j p_t(g) \Big\| \leq C t^{-N/2-i-j} \exp\Big(-\frac{d_G^2(g, e)}{4t} \Big)$$

für $0 < t \leq T$ und $g \in G$, $i, j \in \mathbb{N}$.
Mit (3.17) folgt dann die Eindeutigkeit von $\widetilde{H}_t^\sigma$. Aus obigen Abschätzungen von p_t erhalten wir ferner den folgenden Satz, mit dessen Hilfe wir letztlich den Wärmeleitungskern von Δ_σ konstruieren, siehe Theorem 3.1 in [Mül98] für die Einzelheiten.

Satz 3.6. *Für $0 < t \leq T$ existiert $C > 0$, so dass*

$$\|\widetilde{H}_t^\sigma(g)\| \leq C t^{-n-1/2} \exp\Big(-\frac{\delta(g)^2}{4t}\Big),$$

wobei $2n+1$ die Dimension von $\widetilde{X}$ und δ der geodätische Abstand zwischen eK und gK in G/K ist.

Mit Hilfe dieses Satzes können wir den Wärmeleitungskern von $\mathrm{e}^{-t\Delta_\sigma}$ aus $\widetilde{H}_t^\sigma$ konstruieren. Zunächst beweisen wir das folgende Lemma.

Lemma 3.7. *Für alle $x, y \in \widetilde{X}$ gilt*

$$\sum_{\gamma\in\Gamma} \mathrm{e}^{-d(x,\gamma y)^2} < \infty.$$

Beweis. Es sei F ein Fundamentalbereich von Γ in $\widetilde{X}$. Für $m \in \mathbb{N}$ definieren wir $\Gamma(m)$ durch

$$\Gamma(m) := \{\gamma \in \Gamma \mid m-1 \leq d(x_0, \gamma x_0) < m\},$$

wobei $x_0 \in F$.
Mit Hilfe der Dreiecksungleichung erhalten wir, dass $d(x,\gamma y) \leq d(x_0,\gamma x_0) + d(x_0, x) + d(x_0, y)$. Dann ist

$$\sum_{\gamma\in\Gamma} \mathrm{e}^{-d(x,\gamma y)^2} \leq C \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{\gamma\in\Gamma(m)} \mathrm{e}^{-d(x_0,\gamma x_0)^2}.$$

Behauptung:

$$\#\Gamma(m) \leq C\,\mathrm{e}^{2\rho m}. \tag{3.20}$$

Beweis. Es sei $B_R(x_0)$ der Ball vom Radius R um x_0 in $\widetilde{X}$. Aus (1.3) folgt

$$\mathrm{Vol}(B_R(x_0)) \leq C'\,\mathrm{e}^{2\rho R}. \tag{3.21}$$

Weil F kompakt ist, existiert $R_0 > 0$, so dass $F \subset B_{R_0}(x_0)$. Wir halten ein solches $R_0 > 0$ fest. Nach Konstruktion ist dann

$$\bigcup_{\gamma\in\Gamma(m)} \gamma F \subset B_{R_0+m}(x_0).$$

Aus $\gamma F \cap \gamma' F = \emptyset$ für $\gamma \neq \gamma'$ folgt

$$\#\Gamma(m) \leq \frac{\mathrm{Vol}(B_{R_0+m}(x_0))}{\mathrm{Vol}(F)}$$

und mit (3.21) sofort die obige Behauptung.
Damit ist

$$\sum_{\gamma\in\Gamma} \mathrm{e}^{-d(x,\gamma y)^2} \leq C \sum_{m=1}^{\infty} \mathrm{e}^{2\rho m}\,\mathrm{e}^{-2\rho(m-1)^2} < \infty. \qquad \square$$

Wir kommen jetzt zur Konstruktion des Wärmeleitungskerns von Δ_σ auf X. Es sei

$$H^\sigma(t;x,x') := \sum_{\gamma\in\Gamma} \widetilde{H}^\sigma(t;x,\gamma x').$$

Aus Satz 3.6 und Lemma 3.7 folgt $H^\sigma \in C^\infty(\mathbb{R}^+ \times X \times X, E^\sigma \boxtimes E^{\sigma *})$. Ferner gilt

1) $(\frac{\partial}{\partial t} + \Delta_\sigma)H^\sigma(t;x,y) = 0$;
2) $\forall\, \phi \in C^\infty(X,E^\sigma) : \lim_{t\to 0^+} \int_X H^\sigma(t;x,y)(\phi(y))\mathrm{d}\mathrm{vol}(y) = \phi(x)$;
3) $H^\sigma(t;x,y)^* = H^\sigma(t;y,x)$,

wobei * die adjungierte Abbildung in $E^\sigma \boxtimes E^{\sigma *}$ bezüglich der Hermiteschen Struktur ist. Aus Satz A.8 folgt, dass

$$H^\sigma(t;x,x') = \sum_{\gamma\in\Gamma} \widetilde{H}^\sigma_t(g^{-1}\gamma g') \tag{3.22}$$

ist der Wärmeleitungskern von $\mathrm{e}^{-t\Delta_\sigma}$, wobei $x = \Gamma gK$ und $x' = \Gamma g'K$.

Bemerkung 3.8. Es sei $f \in C^1(G)$. Dann kann man zeigen, dass die Reihe

$$K_f(g,g') = \sum_{\gamma\in\Gamma} f(g\gamma g')$$

absolut konvergent ist für alle $g, g' \in G$. Sie konvergiert gleichmäßig auf kompakten Teilmengen und $K_f(g,g')$ ist C^∞-differenzierbar in g und g'. Für dieses Standardresultat siehe zum Beispiel Korollar 3.9 in [Mül87].

Es sei h^σ_t die gewöhnliche Spur von $\widetilde{H}^\sigma_t$ in $\mathrm{End}(V_\sigma)$. Mit Hilfe des obigen Satzes beweisen wir das folgende Lemma.

Lemma 3.9. *Für $0 < t \le T$ existiert eine Konstante $c > 0$, so dass*

$$\sum_{\gamma\neq e} |h^\sigma_t(g^{-1}\gamma g)| = O(\mathrm{e}^{-c/t}).$$

Beweis. Nach Satz 3.6 ist zunächst

$$\sum_{\gamma\neq e} \|\widetilde{H}^\sigma_t(g^{-1}\gamma g)\| \le Ct^{-n-1/2} \sum_{\gamma\neq e} \exp\Big(-\frac{\delta(g^{-1}\gamma g)^2}{4t}\Big).$$

Ferner existiert ein $c_0 > 0$ (siehe Bemerkung), so dass für $\gamma \neq e$

$$\delta(g^{-1}\gamma g) > c_0. \tag{3.23}$$

Damit ist

$$\sum_{\gamma\neq e} \|\widetilde{H}^\sigma_t(g^{-1}\gamma g)\| \le C\frac{\mathrm{e}^{-c_0^2/4t}}{t^{n+1/2}} \sum_{\gamma\neq e} \exp\Big(-\frac{\delta(g^{-1}\gamma g)^2 - c_0^2}{4t}\Big).$$

Aus Lemma 3.7 erhalten wir die Aussage

$$\sum_{\gamma\neq e} |h^\sigma_t(g^{-1}\gamma g)| \le C\,\mathrm{e}^{-c/t}$$

für $0 < t \le T$. □

Bemerkung. Zu zeigen bleibt die Existenz von c_0, so dass (3.23) gilt. Wir nehmen an, dass es eine Folge $(g_j^{-1}\gamma_j g_j)$ mit $\gamma_j \neq e$ gibt, so dass

$$\lim_{j\to\infty} g_j^{-1}\gamma_j g_j = k \in K.$$

Weil Γ kokompakt ist, existieren Folgen (q_j) in $\Gamma\backslash G$ und (α_j) in Γ mit $g_j = \alpha_j q_j$ und $q_j^{-1}\alpha_j^{-1}\gamma_j\alpha_j q_j \to k$. Ferner können wir ohne Einschränkung annehmen, dass $q_j \to q \in \Gamma\backslash G$. Also

$$\alpha_j^{-1}\gamma_j\alpha_j \to qkq^{-1} \in qKq^{-1}.$$

Weil Γ diskret ist, ist die Folge $(\alpha_j^{-1}\gamma_j\alpha_j)$ in Γ fast überall konstant. Also für $j \gg 0$ ist $\alpha_j^{-1}\gamma_j\alpha_j \in \Gamma \cap qKq^{-1}$. Weil Γ torsionsfrei, ist aber $\Gamma \cap qKq^{-1} = \{e\}$. Das heißt, dass $\alpha_j^{-1}\gamma_j\alpha_j = e$ bzw. $\gamma_j = e$ für hinreichend große j, was ein Widerspruch zur Annahme ist. Für die Einzelheiten siehe Korollar 5.2 in [Gan68].

Es sei $h_t^\sigma(x)$ die lokale Spur von $\widetilde{H}_t^\sigma$ in $\mathrm{End}(V_\sigma)$. In [BM83] wird der folgende Satz bewiesen.

Satz 3.10. *Für alle $t > 0$ gilt:*

$$\mathrm{Tr}(\mathrm{e}^{-t\Delta_\sigma}) = \mathrm{Tr} R_\Gamma(h_t^\sigma). \tag{3.24}$$

Aus der Bemerkung nach Theorem 3.4 folgt, dass h_t^σ eine K-endliche Funktion ist. Damit können wir die Spurformel (3.9) anwenden, um *die geometrische Seite* von (3.24) zu berechnen. Zum Abschluss dieses Abschnitts wollen wir die zugrundeliegende Methode zur Berechnung der Bahnintegral von h_t^σ erklären.
Es sei π eine unitäre Darstellung von G auf einem Hilbertraum H_π. Mit H_π^∞ bezeichnen wir den Unterraum der C^∞-Vektoren von H_π. Es sei $Z = \sum_i X_i \otimes A_i \in (U(\mathfrak{g}_\mathbb{C}) \otimes \mathrm{End}(V_\sigma))^K$, wobei σ eine unitäre Darstellung von K. Wie oben ordnen Z wir den Differentialoperator

$$\widetilde{D}\colon C^\infty(\widetilde{E}^\sigma) \to C^\infty(\widetilde{E}^\sigma)$$

zu. Dann definieren wir einen Operator $\pi(Z)$ von $H_\pi^\infty \otimes V_\sigma$ in $H_\pi^\infty \otimes V_\sigma$ durch

$$\pi(Z) = \sum_i \pi(X_i) \otimes A_i.$$

Wir bemerken, dass $\pi(Z)$ eine Abbildung von $(H_\pi^\infty \otimes V_\sigma)^K$ auf $(H_\pi^\infty \otimes V_\sigma)^K$ ist. Damit definiert $\pi(Z)$ also einen Operator von $(H_\pi^\infty \otimes V_\sigma)^K$ in $(H_\pi^\infty \otimes V_\sigma)^K$, den wir mit $\widetilde{D}^\pi$ bezeichnen.
Wir betrachten

$$\Omega \otimes \mathrm{Id} - \Omega_K \otimes \mathrm{Id} \in (Z(\mathfrak{g}_\mathbb{C}) \otimes \mathrm{End}(V_\sigma))^K,$$

wobei Ω das Casimir-Element von G und Ω_K das Casimir-Element von K ist. Dann ist der zugehörige Operator $\widetilde{\Delta}_\sigma^\pi\colon (H_\pi^\infty \otimes V_\sigma)^K \to (H_\pi^\infty \otimes V_\sigma)^K$ von der Form

$$\widetilde{\Delta}_\sigma^\pi = -\pi(\Omega) + \sigma(\Omega_K).$$

Es sei $\widetilde{H}_t^\sigma$ der Wärmeleitungskern von $\widetilde{\Delta}_\sigma$. Wir definieren

$$\pi(\widetilde{H}_t^\sigma) = \int_G \pi(g) \otimes \widetilde{H}_t^\sigma(g)\mathrm{d}g.$$

Analog zu obigen Überlegungen zeigt man, dass für eine unitäre Darstellung π folgendes gilt:

$$\mathrm{e}^{-t\widetilde{\Delta}_\sigma^\pi} = \pi(\widetilde{H}_t^\sigma).$$

Ein weiteres fundamentales Resultat von Harish-Chandra für eine unitäre irreduzible Darstellung π von G besagt, dass die Einschränkung von H_π auf K in eine direkte Summe von K-Modulen V_μ mit Multiplizität $m_\mu(\pi) < \dim V_\mu$ zerfällt. Daraus folgt

$$\dim(H_\pi \otimes V_\sigma)^K = \dim \mathrm{Hom}_K(H_\pi \restriction_K, V_\sigma) < \infty.$$

Dann ist

$$\pi(\widetilde{H}_t^\sigma) = \mathrm{e}^{-t(-\pi(\Omega)+\sigma(\Omega_K))}\,\mathrm{Id},$$

wobei Id die Identität auf dem *endlichdimensionalen* Raum $(H_\pi \otimes V_\sigma)^K$ ist. Es sei $\pi = \pi_{\xi,\lambda}$. Dann erhalten wir mit Hilfe der Frobenius-Reziprozität: $(H_{\xi,\lambda}\restriction_K \otimes V_\sigma)^K \cong (W_\xi \otimes V_\sigma \restriction_M)^M$, dass

$$\widehat{h_t^\sigma}(\xi,\lambda) = \mathrm{Tr}\pi_{\xi,\lambda}(h_t^\sigma) = \mathrm{e}^{-t(-\pi_{\xi,\lambda}(\Omega)+\lambda_\sigma)} \dim(W_\xi \otimes V_\sigma)^M, \tag{3.25}$$

wobei h_t^σ die lokale Spur von $\widetilde{H}_t^\sigma$ in $\mathrm{End}(V_\sigma)$ ist und $\lambda_\sigma = \sigma(\Omega_K) \geq 0$. Der infinitesimale Charakter von $\pi_{\xi,\lambda}$, d.h., $\pi_{\xi,\lambda}(\Omega)$, ist gegeben durch

$$\pi_{\xi,\lambda}(\Omega) = -\lambda^2 - \rho^2 + \|\Lambda_\xi + \rho_{\mathfrak{m}}\|^2 - \|\rho_{\mathfrak{m}}\|^2,$$

siehe [Art89, Seite 48], wobei Λ_ξ das höchste Gewicht der irreduziblen Darstellung ξ von M in W_ξ ist und $\rho_{\mathfrak{m}}$ wie oben $\frac{1}{2}\sum_{\alpha>0}\alpha$ ist. Damit ergibt sich

$$\rho_{\mathfrak{m}} = (n-1,\ldots,1,0) \in \mathbb{R}^n.$$

Bemerkung 3.11. Zum Beweis von Satz 8.4 benötigen wir, dass der Resolventenkern von $(\widetilde{\Delta}_\sigma + \lambda\,\mathrm{Id})^{-1}$, $\mathrm{Re}(\lambda) > 0$ eine L^1-Abbildung außerhalb der Diagonalen ist. Dazu identifizieren wir zunächst den Resolventenkern mit einer K-äquivarianten C^∞-Abbildung $\widetilde{R}_\lambda^\sigma : G \to \mathrm{End}(V_\sigma)$. Für $g \neq g'$ ist

$$\widetilde{R}_\lambda^\sigma(g^{-1}g') = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-t\lambda}\,\widetilde{H}_t^\sigma(g^{-1}g')\mathrm{d}t.$$

Wir beschränken uns zunächst auf den Funktionenfall, d.h., es sei $\sigma = \mathbb{1} : K \to \mathrm{GL}_1(\mathbb{C})$ die triviale Darstellung von K. Nach [GN98] ist der Wärmeleitungskern des Laplace-Beltrami-Operators $\widetilde{\Delta}$ auf der hyperbolischen Mannigfaltigkeit $\widetilde{X}$ der Dimension $2n+1$ gegeben durch

$$\widetilde{H}(t,u) = \frac{(-1)^n}{(2\pi)^n}\frac{1}{(4\pi t)^{1/2}}\Big(\frac{1}{\sinh u}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\Big)^n \mathrm{e}^{-tn^2}\,\mathrm{e}^{-u^2/4t}, \tag{3.26}$$

wobei $u := \delta(g^{-1}g')$ der geodätische Abstand von $x = gK$ und $y = g'K$ in $\widetilde{X}$ bezeichnet. Dann ist der Resolventenkern gegeben durch

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-t\lambda^2} \frac{(-1)^n}{(2\pi)^n} \frac{\mathrm{e}^{-tn^2}}{(4\pi t)^{1/2}} \Big(\frac{1}{\sinh u} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\Big)^n \mathrm{e}^{-u^2/4t}\, \mathrm{d}t = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-t(\lambda+n^2)}\, p_n(t^{-1/2}; u)\, \mathrm{e}^{-u^2/4t}\, \mathrm{d}t,$$

wobei $p_n(t^{-1/2}; u)$ ein Polynom von $\frac{u}{\sinh u} t^{-1/2}$ vom Grad n ist:

$$p_n(t^{-1/2}; u) = \sum_{k=1}^{n} a_k t^{-k-1/2} \Big(\frac{u}{\sinh u}\Big)^k.$$

Damit ist der Resolventenkern von $(\widetilde{\Delta} + (z+n)(z-n)\,\mathrm{Id})^{-1}$ gegeben durch

$$\widetilde{R}_z(u) = \sum_{k=1}^{n} a_k \Big(\frac{u}{\sinh u}\Big)^k \int_0^\infty \mathrm{e}^{-tz^2}\, \mathrm{e}^{-u^2/4t}\, t^{-k-1/2} \mathrm{d}t,$$

wobei $z^2 = \lambda + n^2$. Mittels partieller Integration erhält man aus (8.9), dass

$$\widetilde{R}_z(u) = \sum_{k=1}^{n} b_k \sinh^{-k}(u)\, \mathrm{e}^{-zu}\,.$$

Weil die Volumenform auf G bezüglich der Cartan-Zerlegung KA^+K durch $C \sinh(u)^{2n}$ gegeben ist, wobei $C = \mathrm{Vol}(S^{2n})$, folgt damit schließlich, dass $\widetilde{R}_z$ eine L^1-Funktion ist.

Für den Fall des Bochner-Laplace-Operators wenden wir das Prinzip der Halbgruppendominanz um den Wärmeleitungskern durch den Kern im Funktionenfall abzuschätzen. Dieses auf Donnelly/Li [DL82, Thorem 4.3] zurückgehende Resultat für kompakte Mannigfaltigkeiten wurde von Müller in [Mül98, Proposition 3.2] auf allgemeine symmetrische Räume verallgemeinert. Damit können wir die Punktweise Norm $|H^\sigma|$ des Wärmeleitungskerns $\widetilde{H}^\sigma(t; x, y) \in \mathrm{Hom}(\widetilde{E}^\sigma_y, \widetilde{E}^\sigma_x)$ von $\widetilde{\Delta}_\sigma$ durch $\widetilde{H}(t; u)$ abschätzen. Daraus folgt, wie im Funktionenfall, dass der Resolventenkern $\widetilde{R}^\sigma_\lambda \in (L^1(G) \otimes \mathrm{End}(V_\sigma))^{K \times K}$ ist.

4 Die induzierte analytische Torsion $T^{\mathrm{an}}(\tau)^2$

Wir behalten die Voraussetzungen über die zugrundeliegende hyperbolische Mannigfaltigkeit aus den vorherigen Abschnitten bei. In diesem Abschnitt wird der Spezialfall eines assoziierten flachen Vektorraumbündels über X, das durch einen G-Modul induziert wird, diskutiert.

4.1 Endlichdimensionale Darstellung τ von G

Es sei $\mathfrak{h}$ eine maximal abelsche Untergruppe von $\mathfrak{g}$, die $\mathfrak{a}$ enthält. Es sei $\mathfrak{t}$ ein maximaler Torus in $\mathfrak{m}$, wobei die Lie-Algebra von M ist. Dann ist $\mathfrak{h} = \mathfrak{t} \oplus \mathfrak{a}$. Die Komplexifizierung

$\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}$ von $\mathfrak{h}$ ist dann eine Cartan-Algebra von $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}$. Wir bemerken, dass $\mathfrak{g}$ nur eine Konjugationsklasse von Cartan-Algebren hat, siehe [Wal73, Abschnitt 7.9]. Es gilt

$$\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}^* = \mathfrak{t}_{\mathbb{C}}^* \oplus \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*, \tag{4.1}$$

wobei $\mathfrak{t}_{\mathbb{C}}$ bzw. $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}$ mit den linearen Funktionalen auf $\mathfrak{h}$ identifiziert werden, die auf $\mathfrak{a}$ bzw. $\mathfrak{t}$ verschwinden. Mit $\triangle_G$ bezeichnen wir die Menge der Wurzeln von $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ bezüglich $\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}$.Wir wählen eine Weyl-Kammer in $\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}^*$ derart, dass $\mathfrak{a}^+$ in ihr liegt. Es sei $\triangle_G^+$ das assoziierte positive Wurzelsystem von $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$. Wir benutzen folgende Basis von $\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}^*$: Es seien $\epsilon_0 \in \mathfrak{a}^*$ und $\epsilon_j \in i\mathfrak{t}^*$ mit

$$\epsilon_0(H_{\mathbb{R}}) = 1$$

wie in [Hei90, Abschnitt IV.2.3.D]. Dann ist $\triangle_G^+ = \{\epsilon_i \pm \epsilon_j \mid 0 \leq i < j \leq n\}$. Ferner ist

$$\{\epsilon_0 - \epsilon_1, \epsilon_1 - \epsilon_2, \ldots, \epsilon_{n-1} - \epsilon_n, \epsilon_{n-1} + \epsilon_n\}$$

die Menge der einfachen Wurzeln von $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ bezüglich $\triangle_G^+$. Aus (4.1) folgt, dass die Menge $\triangle_M$ der Wurzeln von $\mathfrak{m}_{\mathbb{C}}$ bezüglich $\mathfrak{t}_{\mathbb{C}}$ den Wurzeln $\alpha \in \triangle_G$ mit $\alpha\restriction_{\mathfrak{a}} = 0$ entspricht. Daraus erhalten wir die Menge der positiven Wurzeln $\triangle_M^+ = \{\epsilon_i \pm \epsilon_j \mid 1 \leq i < j \leq n\}$. Für die Menge der eingeschränkten Wurzeln von $\mathfrak{g}$ bezüglich $\mathfrak{a}$ erhalten wir $\triangle_A = \{\alpha \in \triangle_G \mid \alpha\restriction_{\mathfrak{a}} \neq 0\} = \{\pm\epsilon_0\}$. Ferner ist $\triangle_A^+ = \{\epsilon_0\}$. Es seien $\rho_{\mathfrak{g}}$ bzw. $\rho_{\mathfrak{m}}$ die halbe Summe der positiven Wurzeln von $\mathfrak{g}$ bzw. $\mathfrak{m}$. Dann ist

$$\rho_{\mathfrak{g}} = (n, n-1, \ldots, 1, 0) \quad \text{und} \quad \rho_{\mathfrak{m}} = (n-1, \ldots, 1, 0).$$

Es sei

$$\tau\colon G \to \mathrm{GL}(V_\tau)$$

eine *irreduzible* Darstellung von G in einem endlichdimensionalen Vektorraum V_τ über $\mathbb{C}$. Durch die Fortsetzung von τ zu einer Darstellung von $G_{\mathbb{C}}$ wird sie bis auf Äquivalenz eindeutig durch ihr höchstes Gewicht beschrieben. Das ist die Aussage des Theorems vom höchsten Gewicht, siehe [Wal73, Theorem 4.5.3]. Wir verwenden das oben definierte positive Wurzelsystem. Das höchste Gewicht Λ_τ von τ ist

$$\Lambda_\tau = \sum_{i=0}^{n} m_i \epsilon_i, \quad m_i \in \tfrac{1}{2}\mathbb{Z}, \quad m_i - m_j \in \mathbb{Z}$$

mit $m_0 \geq m_1 \geq m_2 \geq \cdots \geq |m_n|$, siehe [Hei90, Satz IV.3.2.5]. Wir werden von nun an das höchste Gewicht von τ bezeichnen durch

$$\Lambda_\tau = (m_0, \ldots, m_n).$$

Bemerkung. Wir bemerken, dass $G = \mathrm{SO}_e(2n+1, 1)$ eine reelle Form von $G_{\mathbb{C}} = \mathrm{SO}(2n+2; \mathbb{C})$ ist. Darstellung τ ist die Einschränkung der Darstellung von $G_{\mathbb{C}}$ vom höchsten Gewicht Λ_τ auf G.

Es sei $\overline{\tau}\colon G \to \mathrm{GL}(\overline{V}_\tau)$ die komplexkonjugierte Darstellung von G, wobei $\overline{V}_\tau$ der zu V_τ komplexkonjugierte Vektorraum ist. In [Oni04] wird gezeigt, dass das höchste Gewicht $\overline{\Lambda}_\tau$ der Darstellung $\overline{\tau}$ von $G = \mathrm{SO}_e(2n+1,1)$ von der Parität von n abhängt:

$$\overline{\Lambda}_\tau = \begin{cases} (m_0, \dots, m_{n-1}, m_n), & \text{falls } n \text{ gerade;} \\ (m_0, \dots, m_{n-1}, -m_n), & \text{falls } n \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Für das höchste Gewicht Λ_τ^* der kontragredienten Darstellung $\tau^*\colon G \to \mathrm{GL}(V_\tau^*)$ gilt

$$\Lambda_\tau^* = \begin{cases} (m_0, \dots, m_{n-1}, m_n), & \text{falls } n \text{ ungerade;} \\ (m_0, \dots, m_{n-1}, -m_n), & \text{falls } n \text{ gerade,} \end{cases}$$

siehe [Oni04], wobei V_τ^* der duale Vektorraum ist.
Es sei

$$\tau_\theta\colon G \to \mathrm{GL}(V_\tau^\theta)$$

die irreduzible Darstellung von G die durch $\tau_\theta(g) := \tau(\theta(g))$ definiert ist, wobei θ die Cartan-Involution ist. Nach [Oni04, Theorem 8.3] ist die Darstellung $\tau_\theta\colon G \to \mathrm{GL}(V_\tau^\theta)$ die kontragrediente Darstellung der komplexkonjugierten Darstellung von τ, d.h., $\tau_\theta = \overline{\tau}^*$. Damit ist das höchste Gewicht Λ_τ^θ der Darstellung τ_θ von G unabhängig von der Parität von n. Es ist

$$\Lambda_\tau^\theta = (m_0, \dots, m_{n-1}, -m_n).$$

4.2 Der Hodge-Laplace-Operator $\Delta_r(\tau)$

Es sei $\tau\colon G \to \mathrm{GL}(V_\tau)$ eine komplexe endlichdimensionale Darstellung, so dass

$$\tau_\theta \not\cong \tau. \tag{4.2}$$

Es sei $\chi\colon \Gamma \to \mathrm{GL}(V_\tau)$ die Einschränkung von τ auf die Untergruppe Γ von G. Es sei E^χ das assoziierte flache Vektorraumbündel über X. Weil V_τ ein Γ-Modul ist, ist die Gruppen-Kohomologie $H^*(\Gamma; V_\tau)$ definiert und es gilt $H^*(\Gamma; V_\tau) \cong H(X; E^\chi)$. Nach Theorem VII.6.7 in [BW00] folgt aus (4.2), dass χ azyklisch ist, d.h.,

$$H^*(X; E^\chi) = \{0\}.$$

Wir folgen der Konstruktion eines Hodge-Laplace-Operators auf einem flachen Vektorraumbündel $E^\chi \to X$ aus Abschnitt 2. Das heißt, dass wir insbesondere eine Hermitesche Struktur h^χ auf E^χ wählen, mit dessen Hilfe der zu d_χ adjungierte Operator δ_χ auf $\Lambda^r(X, E^\chi)$ konstruiert wird. Es sei $\Delta_r(\chi; h^\chi)\colon \Lambda^r(X; E^\chi) \to L^2\Lambda^r(X; E^\chi)$ der Hodge-Laplace-Operator bezüglich h^χ. Weil die Darstellung $\chi = \tau\restriction_\Gamma$ azyklisch, ist die analytische Torsion

$$T^{\mathrm{an}}(\chi)^2 = \prod_{r=0}^{2n+1} \det(\Delta_r(\chi; h^\chi))^{r(-1)^r}$$

unabhängig von h^χ. Um zu unterstreichen, dass die Darstellung χ von Γ durch die Darstellung τ induziert wird, schreiben wir $T^{\mathrm{an}}(\tau)^2$ für die analytische Torsion $T^{\mathrm{an}}(\chi)^2$ und nennen sie die *τ-induzierte* analytische Torsion, oder einfach die induzierte analytische Torsion.

Bemerkung. Weil nach Lemma 4.3 in [Mül93] jede endlichdimensionale Darstellung τ von G unimodular ist, können wir die induzierte analytische Torsion mit der topologischen Torsion $T^{\mathrm{top}}(\tau)$ identifizieren.

Wir bemerken, dass uns zunächst die Methode der Spurformel zur Berechnung der geometrischen Seite der Theta-Funktion von $\Delta_r(\chi; h^\chi)$ nicht zur Verfügung steht. Das Hindernis bildet dabei die nicht unitäre Darstellung χ und die daraus resultierenden Probleme bei der Definition von $L^2(\Gamma\backslash G : \chi)$, siehe Bemerkung 3.1. Eine Lösung dieses Problems erhalten wir durch eine alternative Realisierung des assoziierten flachen Vektorraumbündels E^χ über X.
Es sei τ die Einschränkung von $\tau\colon G \to \mathrm{GL}(V_\tau)$ auf die maximal kompakte Untergruppen K von G. Wie in Abschnitt 3.2 definieren wir das homogene Vektorraumbündel $\widetilde{E}^\tau \to \widetilde{X}$ und das lokal homogene Vektorraumbündel

$$E^\tau = \Gamma\backslash\widetilde{E}^\tau \to X.$$

Es gilt der folgende Satz.

Satz 4.1. *Es sei τ eine endlichdimensionale Darstellung von G. Dann gilt*

$$\Gamma\backslash(G/K \times V_\tau) \cong (\Gamma\backslash G \times V_\tau)/K. \tag{4.3}$$

Beweis. Siehe [MM63, Proposition 3.1]. □

Wir sehen also, dass die Vektorraumbündel E^χ und E^τ über X zwei unterschiedliche Realisierungen des selben Objekts sind.
Es sei

$$\sigma_r(\tau) := \sigma_r \otimes \tau\colon K \to \mathrm{GL}(\Lambda^r \mathfrak{p}^* \otimes V_\tau). \tag{4.4}$$

Nach (3.10) ist dann $\Lambda^r(\widetilde{X}, \widetilde{E}^\tau)$ der Raum der r-Differentialformen in $\widetilde{X}$ mit Werten in $\widetilde{E}^\tau$ isomorph zu $(C^\infty(G) \otimes \Lambda^r\mathfrak{p}^* \otimes V_\tau)^K$, wobei die Wirkung von K auf den Funktionen aus $C^\infty(G) \otimes \Lambda^r\mathfrak{p}^* \otimes V_\tau$ durch $\sigma_r(\tau)$ induziert wird. Ferner identifizieren wir mit Satz 4.1

$$\Lambda^r(X; E^\chi) \cong (C^\infty(\Gamma\backslash G) \otimes \Lambda^r\mathfrak{p}^* \otimes V_\tau)^K.$$

Es sei $\{X_i\}$ eine orthonormale Basis von $\mathfrak{p}$ bezüglich $\langle\cdot\,,\cdot\rangle$. Wir setzen den flachen kanonischen Zusammenhang auf $\widetilde{E}^\tau$ zur äußeren Ableitung auf $(C^\infty(G) \otimes \Lambda^r\mathfrak{p}^* \otimes V_\tau)^K$ fort und erhalten [MM63, Proposition 4.1], dass

$$\widetilde{\mathrm{d}}_\tau = \sum_{i=1}^{2n+1} R(X_i) \otimes \varepsilon(X_i) \otimes \mathrm{Id}_\tau + \mathrm{Id} \otimes \varepsilon(X_i) \otimes \tau(X_i), \tag{4.5}$$

wobei $\varepsilon(X_i)\colon \Lambda^r\mathfrak{p}^* \to \Lambda^{r+1}\mathfrak{p}^*$ wie üblich die äußere Multiplikation bezeichnet; hierbei wird X_i durch die Metrik $\langle\cdot\,,\cdot\rangle$ mit dem dualen Element identifiziert.
Für die Konstruktion des zu $\widetilde{\mathrm{d}}_\tau$ adjungierten Operators auf $(C^\infty(G) \otimes \Lambda^r\mathfrak{p}^* \otimes V_\tau)^K$ müssen wir eine geeignete homogene Hermitesche Struktur auf $\widetilde{E}^\tau$ beschreiben. Dazu bemerken wir, dass es unrealistisch ist anzunehmen, dass auf V_τ eine positiv definite G-invariante

Hermitesche Form existiert. In der Tat, müßte G in diesem Fall dann eine kompakte Gruppe sein.
Es sei G^d das kompakte Dual von G. Es sei $\mathfrak{g}^d$ die Lie-Algebra von G^d. Dann ist $\mathfrak{g}^d = \mathfrak{k} \oplus i\mathfrak{p}$. Nach allgemeinen Prinzipien existiert auf dem irreduziblen G^d-Modul V_τ eine bis auf einen positiven Faktor eindeutig bestimmte positiv definite G^d-invariante Hermitesche Form $(\cdot\,,\cdot)_\tau$. Das heißt, für alle $Z \in \mathfrak{g}_d$ ist

$$(\tau(Z)u, v)_\tau = -(u, \tau(Z)v)_\tau.$$

Wenn wir dies auf $\mathfrak{g}$ zurückübersetzen, so sehen wir, dass

$$\begin{aligned} (\tau(Y_j)u, v)_\tau &= -(u, \tau(Y_j)v)_\tau \quad \text{für} \quad Y_j \in \mathfrak{k}, \\ (\tau(X_i)u, v)_\tau &= (u, \tau(X_i)v)_\tau \quad \text{für} \quad X_i \in \mathfrak{p}. \end{aligned} \tag{4.6}$$

Somit haben wir ein *verträgliches* (siehe [MM63, Lemma 3.1]) inneres Produkt auf V_τ konstruiert. Weil das innere Produkt $(\cdot\,,\cdot)_\tau$ auf dem G-Modul V_τ invariant unter der Wirkung von K ist, d.h.,

$$(\tau(k)u, \tau(k)v)_\tau = (u, v)_\tau, \tag{4.7}$$

können wir damit die *kanonische Hermitesche Struktur* $(\cdot\,,\cdot)_\tau$ auf $\widetilde{E}^\tau$ definieren. Dann ist

$$(L^2(G) \otimes \Lambda^r \mathfrak{p} \otimes V_\tau)^K \cong L^2\Lambda^r(\widetilde{X}; \widetilde{E}^\tau).$$

Den Hodge-Laplace-Operator $\widetilde{\Delta}_r(\tau)$ bezüglich $(\cdot\,,\cdot)_\tau$ nennen wir τ-*induziert*. Für den induzierten Hodge-Laplace-Operator gilt der folgende Satz, der als Verallgemeinerung des Lemmas von Kuga [BW00, Theorem 2.5] verstanden werden kann.

Satz 4.2. *Auf* $(C^\infty(G) \otimes \Lambda^r \mathfrak{p}^* \otimes V_\tau)^K$ *ist*

$$\widetilde{\Delta}_r(\tau) = -R(\Omega) \otimes \mathrm{Id} \otimes \mathrm{Id}_\tau + \mathrm{Id} \otimes \mathrm{Id} \otimes \tau(\Omega). \tag{4.8}$$

Beweis. Man findet den Beweis dieser Aussage in [MM63, Proposition 6.1]. Dabei ist die Wahl der kanonischen Hermiteschen Struktur $(\cdot\,,\cdot)_\tau$ auf E^τ entscheidend. In der Tat folgt aus (4.6), dass der zu $\widetilde{\mathrm{d}}_\tau$ formal adjungierte Operator auf $(C^\infty(G) \otimes \Lambda^r \mathfrak{p}^* \otimes V_\tau)^K$ von der folgenden Form ist:

$$\widetilde{\delta}_\tau = \sum_{i=1}^{2n+1} -R(X_i) \otimes \iota(X_i) \otimes \mathrm{Id}_\tau + \mathrm{Id} \otimes \iota(X_i) \otimes \tau(X_i), \tag{4.9}$$

wobei ι adjungiert zu ε bezüglich $\langle\cdot\,,\rangle$ ist. Aus $\varepsilon(X_k)\iota(X_l) + \iota(X_l)\varepsilon(X_k) = \delta_{kl}$, erhalten wir zunächst, dass

$$\widetilde{\Delta}_r(\tau) = -\sum_i R(X_i^2) \otimes \mathrm{Id} \otimes \mathrm{Id} - \mathrm{Id} \otimes \mathrm{Id} \otimes \tau(X_i^2)$$

und mit $\sum_i X_i^2 = \Omega + \Omega_K$, dass

$$\begin{aligned} \widetilde{\Delta}_r(\tau) = -R(\Omega) \otimes \mathrm{Id} \otimes \mathrm{Id} &+ \mathrm{Id} \otimes \mathrm{Id} \otimes \tau(\Omega) \\ &- R(\Omega_K) \otimes \mathrm{Id} \otimes \mathrm{Id} + \mathrm{Id} \otimes \mathrm{Id} \otimes \tau(\Omega_K). \end{aligned}$$

Weil R eine induzierte Darstellung auf $(L^2(G) \otimes V_\tau)^K$ ist, gilt $R(\Omega_K) = \tau(\Omega_K)$. Damit erhalten wir die Aussage. □

Der Hodge-Laplace-Operator $\Delta_r(\tau_\theta)$

Nach Voraussetzung (4.2) an den G-Modul ist $\tau \ncong \tau_\theta$, wobei $\tau_\theta(g) = \tau(\theta(g))$ und θ die Cartan-Involution auf G ist. Daraus folgt, dass die zu den Darstellungen $\tau\restriction_\Gamma$ und $\tau_\theta\restriction_\Gamma$ assoziierte flache Vektorraumbündel über X nicht isomorph sind. Weil andererseits K nach Definition die θ-invariante Untergruppe von G ist, sehen wir, dass $\tau\restriction_K \cong \tau_\theta\restriction_K$ ist. Das heißt, dass die K-Module V_τ und V_τ^θ äquivalent sind. Damit sind die homogenen Vektorraumbündeln $\widetilde{E}^\tau$ und $\widetilde{E}^{\tau_\theta}$ isomorph. Die flachen Zusammenhänge ∇^τ und ∇^{τ_θ} auf E^τ und E^{τ_θ} sind jedoch unterschiedlich. Bezüglich der Identifikation (4.3) erhält man, dass

$$\nabla^\tau_{\pi_*(g)(Y)}\psi = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0}(g\exp(tY)^{-1}\psi(g\exp(tY)K) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0}\tau((g\exp(tY))^{-1})\psi(g\exp(tY)K)),$$

siehe Lemma 1.4 in [Har75].
Es sei $\{X_i\}$ eine orthonormale Basis von $\mathfrak{p}$ bezüglich $\langle\cdot\,,\cdot\rangle$. Wie oben setzen wir den flachen kanonischen Zusammenhang auf $\widetilde{E}^\tau$ zur äußeren Ableitung auf $(C^\infty(G)\otimes\Lambda^r\mathfrak{p}^*\otimes V_\tau)^K$ fort und erhalten, dass

$$\widetilde{\mathrm{d}}_{\tau_\theta} = \sum_{i=1}^{2n+1} R(X_i)\otimes\varepsilon(X_i)\otimes\mathrm{Id}_\tau + \mathrm{Id}\otimes\varepsilon(X_i)\otimes\tau_\theta(X_i).$$

Aus $\tau_\theta(X_i) = -\tau(X_i)$ für alle $X_i \in \mathfrak{p}$ folgt

$$\widetilde{\mathrm{d}}_{\tau_\theta} = \sum_{i=1}^{2n+1} R(X_i)\otimes\varepsilon(X_i)\otimes\mathrm{Id}_\tau - \mathrm{Id}\otimes\varepsilon(X_i)\otimes\tau(X_i). \tag{4.5$_\theta$}$$

Man erkennt sofort, dass die kanonische Hermitesche Struktur auf $\widetilde{E}^{\tau_\theta}$ der von $\widetilde{E}^\tau$ entspricht. Wir erhalten schließlich den zu $\widetilde{\mathrm{d}}_{\tau_\theta}$ adjungierten Operator

$$\widetilde{\delta}_{\tau_\theta} = \sum_{i=1}^{2n+1} -R(X_i)\otimes\iota(X_i)\otimes\mathrm{Id}_\tau - \mathrm{Id}\otimes\iota(X_i)\otimes\tau(X_i). \tag{4.9$_\theta$}$$

Für den induzierten Hodge-Laplace-Operator $\Delta_r(\tau_\theta)$ zeigt man wie in Satz 4.2, dass

$$\Delta_r(\tau_\theta) = -R(\Omega)\otimes\mathrm{Id}\otimes\mathrm{Id}_\tau + \mathrm{Id}\otimes\mathrm{Id}\otimes\tau(\Omega)$$

auf $C^\infty(G)\otimes\Lambda^r\mathfrak{p}^*\otimes V_\tau^\theta)^K$ ist. Also stimmen die induzierten Hodge-Laplace-Operatoren $\Delta_r(\tau)$ und $\Delta_r(\tau_\theta)$ für alle r überein. Nach Definition der induzierten analytischen Torsion erhalten wir sofort das folgende Korollar.

Korollar 4.3. *Es gilt*

$$T^{\mathrm{an}}(\tau)^2 = T^{\mathrm{an}}(\tau_\theta)^2.$$

5 Die Spurformel von $J_\tau(t)$

Es sei $\tau\colon G \to \mathrm{GL}(V_\tau)$ eine irreduzible Darstellung von G vom höchstem Gewicht

$$\Lambda_\tau = (m_0, m_1, \ldots, m_n).$$

Mit Hilfe von Satz 4.1 betrachten wir die Realisierung des zur Darstellung $\chi = \tau\restriction_\Gamma$ assoziierten flachen Vektorraumbündels E^χ als lokal-homogendes Vektorraumbündel das durch die Darstellung $\tau\restriction_K$ von K induziert wird. Das heißt, wir betrachten wie bisher eine irreduzible Darstellung $\tau\colon G \to \mathrm{GL}(V_\tau)$ von G. Die Einschränkung dieser Darstellung auf Γ liefert uns ein flaches Vektorraumbündel $E^\chi \to X$, wobei $\chi = \tau\restriction_\Gamma$ ist. Die Einschränkung von τ auf die kompakte Untergruppe K von G liefert das homogene Vektorraumbündel $\widetilde{E}^\tau \to \widetilde{X}$, wobei $\tau = \tau\restriction_K$. Mit der Wahl der kanonischen Hermiteschen Struktur auf $\widetilde{E}^\tau$ haben wir im vorherigen Abschnitt den Hilbertraum $L^2(\widetilde{E}^\tau)$ konstruiert und diesen mit $(L^2(G) \otimes V_\tau)^K$ identifiziert. Es sei $E^\tau = \Gamma\backslash\widetilde{E}^\tau$ das assoziierte lokal-homogene Hermitesche Vektorraumbündel über X. Dann ist

$$L^2(X, E^\tau) \cong (L^2(\Gamma\backslash G) \otimes V_\tau)^K.$$

Ziel dieses Abschnitts ist, die Funktion

$$J_\tau(t) := \sum_{r=0}^{2n+1} (-1)^r r \operatorname{Tr} \mathrm{e}^{-t\Delta_r(\tau)} \tag{5.1}$$

mittels Spurformel mit geometrischen Objekten zu identifizieren.
Weil nach Konstruktion der Wärmeleitungsoperator $\mathrm{e}^{-t\widetilde{\Delta}_r(\tau)}$ invariant unter der Wirkung von G ist, können wir seinen Wärmeleitungskern $\widetilde{H}_t^{\tau,r}$ für alle $t > 0$ mit einer Abbildung auf G mit Werten in $\mathrm{End}(\Lambda^r \mathfrak{p}^* \otimes V_\tau)$ identifizieren, die der folgenden Äquivarianz-Bedingung genügt:

$$\widetilde{H}_t^{\tau,r}(g) = \sigma_r(\tau)(k)\widetilde{H}_t^{\tau,r}(k^{-1}gk')\sigma_r(\tau)(k'^{-1}),$$

wobei $\sigma_r(\tau) = \sigma_r \otimes \tau\colon K \to \mathrm{GL}(\Lambda^r \mathfrak{p}^* \otimes V_\tau)$.
Damit können wir die in Abschnitt 3.2 entwickelte Methode zur Bestimmung der Spur von $\mathrm{e}^{-t\Delta_r(\tau)}$ mittels Selbergscher Spurformel anwenden. Wir bemerken zuerst, dass nach Satz 3.5 für alle $t > 0$

$$\widetilde{H}_t^{\tau,r} \in (C^1(G) \otimes \mathrm{End}(\Lambda^r \mathfrak{p}^* \otimes V_\tau))^{K\times K}. \tag{5.2}$$

Ferner erfüllt $\widetilde{H}_t^{\tau,r}$ die Abschätzung aus Satz 3.6. Damit erhalten wir, dass der Wärmeleitungskern $H^{\tau,r}(t; x, y)$ von $\mathrm{e}^{-t\Delta_r(\tau)}$ gegeben ist durch

$$H^{\tau,r}(t; \dot{x}, \dot{y}) = \sum_{\gamma\in\Gamma} \widetilde{H}_t^{\tau,r}(x^{-1}\gamma y),$$

wobei $\dot{x} = \Gamma x K$ und $\dot{y} = \Gamma y K$.

Es sei $h_t^{\tau,r}$ die lokale Spur von $\widetilde{H}_t^{\tau,r}$ auf $\mathrm{End}(\Lambda^r \mathfrak{p}^* \otimes V_\tau)$. Aus Satz 3.10 folgt

$$\operatorname{Tr} \mathrm{e}^{-t\Delta_r(\tau)} = \operatorname{Tr} R_\Gamma(h_t^{\tau,r}).$$

Es sei π eine unitäre irreduzible Darstellung von G in einem Hilbertraum H_π. Dann ist

$$\operatorname{Tr} \pi(h_t^{\tau,r}) = \mathrm{e}^{-t(-\pi(\Omega)\otimes \mathrm{Id} + \mathrm{Id} \otimes \tau(\Omega))} \dim(H_\pi \otimes \Lambda^r \mathfrak{p}^* \otimes V_\tau)^K.$$

Bemerkung. Die Berechnung von $\dim(H_\pi \otimes \Lambda^r \mathfrak{p}^* \otimes V_\tau)^K$ ist im Allgemeinen eine schwierige Aufgabe. Dazu muss man die Räume $\Lambda^r \mathfrak{p}$, $H_\pi \restriction_K$ und V_τ in ihre irreduziblen K-Module zerlegen und dann die auftretenden Multiplizitäten betrachten.

An Stelle von $h_t^{\tau,r}$ betrachten wir

$$k_t^\tau := \sum_{r=0}^{2n+1} (-1)^r r \cdot h_t^{\tau,r}.$$

Wir wollen die Fourier-Transformierte von k_t^τ bestimmen. Es sei $\pi_{\xi,\lambda}$ eine Darstellung der Hauptreihe von G. Einsetzen ergibt

$$\begin{aligned}
\widehat{k_t^\tau}(\xi,\lambda) &= \sum_{r=0}^{2n+1} (-1)^r \cdot r\, \widehat{h_t^{\tau,r}}(\xi,\lambda) \\
&= \mathrm{e}^{-t(-\pi_{\xi,\lambda}(\Omega)+\tau(\Omega))} \sum_{r=0}^{2n+1} (-1)^r \cdot r \dim(H_{\xi,\lambda} \otimes \Lambda^r \mathfrak{p}^* \otimes V_\tau)^K \\
&= \mathrm{e}^{-t(-\pi_{\xi,\lambda}(\Omega)+\tau(\Omega))} \sum_{r=0}^{2n+1} (-1)^r \cdot r \dim(W_\xi \otimes \Lambda^r \mathfrak{p}^* \otimes V_\tau)^M,
\end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt die Frobenius-Reziprozität zur Umformung benutzt haben. Wir zerlegen $\mathfrak{p}^*$ in $\mathfrak{a}^* \oplus \mathfrak{p}^\perp$, wobei $\mathfrak{p}^\perp$ das orthogonale Komplement von $\mathfrak{a}^*$ in $\mathfrak{p}^*$ bezüglich $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ist. Der M-Modul $\mathfrak{p}^\perp$ ist isomorph zu $\mathfrak{n}^*$. Weil M der Zentralisator von $\mathfrak{a}$ in K ist, gilt

$$\begin{aligned}
\sum_{r=0}^{2n+1} (-1)^r \cdot r \Lambda^r \mathfrak{p}^* &= \sum_{r=0}^{2n+1} (-1)^r \cdot r \Lambda^r \mathfrak{n}^* + \sum_{r=0}^{2n} (-1)^{r+1} (r+1) \Lambda^r \mathfrak{n}^* \\
&= \sum_{l=0}^{2n} (-1)^{l+1} \Lambda^l \mathfrak{n}^*.
\end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\widehat{k_t^\tau}(\xi,\lambda) = \mathrm{e}^{-t(-\pi_{\xi,\lambda}(\Omega)+\tau(\Omega))} \dim \Big(W_\xi \otimes \big(\sum_{l=0}^{2n} (-1)^{l+1} \Lambda^l \mathfrak{n}^* \otimes V_\tau \big) \Big)^M. \tag{5.3}$$

Zur weiteren Vereinfachung dieses Ausdrucks benötigen wir das folgende Resultat von Kostant [Kos61, Proposition 7.2].

Theorem 5.1. *Es sei $\tau\colon G \to \mathrm{GL}(V_\tau)$ eine endlichdimensionale Darstellung von G vom höchsten Gewicht Λ_τ. Für die MA-Module $\Lambda^l\mathfrak{n}^* \otimes V_\tau$ gilt:*

$$\sum_{l=0}^{2n}(-1)^l\Lambda^l\mathfrak{n}^* \otimes V_\tau \cong \sum_{w\in W^1}(-1)^{\ell(w)}V_{\tau(w)}, \tag{5.4}$$

wobei $\tau(w)\colon MA \to \mathrm{GL}(V_{\tau(w)})$ eine irreduzible Darstellung von MA vom höchsten Gewicht

$$\Lambda_\tau(w) = w(\Lambda_\tau + \rho_\mathfrak{g}) - \rho_\mathfrak{g}$$

ist und

$$W^1 := \{w \in W_G \mid w^{-1}(\alpha) > 0\,\text{für alle}\,\alpha \in \triangle_M^+\}. \tag{5.5}$$

Beweis. Es sei B die standard parabolische Untergruppe von G und MAN ihre Langands-Zerlegung. Die irreduziblen Darstellungen von MA werden durch die höchsten Gewichte parametrisiert, die in der positiven Weyl-Kammer in $\mathfrak{h}_\mathbb{C}^*$ wie in Abschnitt 4.1 definiert liegen. Nach Kostant [Kos61, Theorem 5.14] zerfällt die Kohomologie der Lie-Algebra von $\mathfrak{n}$ mit Koeffizienten im G-Modul V_τ als MA-Modul

$$H^l(\mathfrak{n}; V_\tau) \cong \bigoplus_{\substack{w\in W^1\\ \ell(w)=l}} V_{\tau(w)} \tag{5.6}$$

in irreduzible MA-Module $V_{\tau(w)}$ vom höchstem Gewicht $\Lambda_\tau(w) = w(\Lambda_\tau + \rho_\mathfrak{g}) - \rho_\mathfrak{g}$. Die in dieser Arbeit verwendete Versions dieses Theorems von Kostant findet man in [BW00] Theorem III.3.1 und Theorem 2.5.2.1 in [War72a].
Mit Hilfe des Prinzips von Euler-Poincaré, wonach

$$\sum_{l=0}^{2n}(-1)^l \dim(\Lambda^l\mathfrak{n}^* \otimes V_\tau)^{MA} = \sum_{l=0}^{2n}(-1)^l \dim H^l(\mathfrak{n}; V_\tau),$$

siehe [AB67, Abschnitt 7], erhalten wir aus (5.6), dass für die MA-Module $\Lambda^l\mathfrak{n}^* \otimes V_\tau$ folgendes gilt

$$\sum_{l=0}^{2n}(-1)^l\Lambda^l\mathfrak{n}^* \otimes V_\tau \cong \sum_{w\in W^1}(-1)^{\ell(w)}V_{\tau(w)}. \tag{5.7}$$

Für die Einzelheiten siehe [Kos61, Abschnitt 7.2]. □

Zu einer irreduziblen Darstellung (τ, V_τ) von G vom höchsten Gewicht Λ_τ definieren wir zu jedem Element $w \in W^1$

$$\begin{aligned} \nu_\tau(w) &:= w(\Lambda_\tau + \rho_\mathfrak{g})\restriction_\mathfrak{t} - \rho_\mathfrak{m}, \\ \lambda_\tau(w) &:= -w(\Lambda_\tau + \rho_\mathfrak{g})\restriction_\mathfrak{a}. \end{aligned} \tag{5.8}$$

Weil M mit A kommutiert, sind die MA-Module $V_{\tau(w)}$ das Tensorprodukt eines irreduziblen M-Moduls und des eindimensionalen A-Moduls mit dem Charakter $\chi_\lambda\colon A \to \mathrm{GL}_1(\mathbb{C})$, wobei $\lambda = -\lambda_\tau(w) - \rho$. Als M-Modul ist $V_{\tau(w)}$ vom höchsten Gewicht $\nu_\tau(w)$. Weil

M nur eine Zusammenhangskomponente hat, existiert genau eine irreduzible Darstellung von M vom höchsten Gewicht $\nu_\tau(w)$, die wir ebenfalls mit $\nu_\tau(w)$ bezeichnen wollen.
Wir bemerken, dass die Weyl-Gruppe W_G von G aus der symmetrischen Gruppe S_{n+1} und dem Paarweise-Vorzeichenwechsel besteht, d.h., $W_G = S_{n+1} \ltimes \mathbb{Z}_2$. Die Weyl-Gruppe W_M von M besteht entsprechend aus der symmetrischen Gruppe S_n und dem Paarweise-Vorzeichenwechsel, d.h., $W_M \cong S_n \ltimes \mathbb{Z}_2$. Weil W^1 die Menge der Representaten der Rechtsnebenklassen $W_M w$ in W_G ist, folgt $\#W^1 = 2n$ und ferner

$$W^1 = \{w_0, \dots, w_{n-1}, w^+, w^-, w_{n-1}, \dots, w_{2n}\}$$

mit

$$\begin{aligned}
w_l(m_0, \dots, m_n) &= (m_l, m_0, \dots, m_{l-1}, m_{l+1}, \dots, m_{n-1}, m_n),\\
w^+(m_0, \dots, m_n) &= (m_n, m_0, \dots, m_{n-2}, m_{n-1}),\\
w^-(m_0, \dots, m_n) &= (-m_n, m_0, \dots, m_{n-2}, -m_{n-1}),\\
w_{2n-l}(m_0, \dots, m_n) &= (-m_l, m_0, \dots, m_{l-1}, m_{l+1}, \dots, m_{n-1}, -m_n),
\end{aligned}$$

wobei w_l und $w^\pm$ von der Länge l und n sind. Mit $\ell(w)$ bezeichnen wir die Länge von $w \in W^1$. Es sei w_G bzw. w_M das Element der maximalen Länge in W_G bzw. W_M. Dann definiert

$$w \mapsto w' = w_M w w_G$$

eine Involution auf W^1. Dann ist

$$\ell(w) + \ell(w') = 2n$$

und ferner $w_l' = w_{2n-l}$ sowie $w^{\pm\prime} = w^\mp$.
Für die Einzelheiten siehe das Buch von Borel/Wallach Kapitel III.3 für den allgemeinen Fall und Kapitel VI.3 für den Fall $G = \mathrm{SO}_e(2n+1, 1)$, [BW00].

Wir notieren die höchsten Gewichte von $\nu_\tau(w)$ und $\lambda_\tau(w)$ für $w \in W^1$:

$$\nu_\tau(w) = \begin{cases} (m_0 + 1, m_1 + 1, \dots, m_{l-1} + 1, m_{l+1}, \dots, m_{n-1}, \quad m_n), & \text{für } \ell(w) = l;\\ (m_0 + 1, m_1 + 1, \dots, m_{l-1} + 1, m_{l+1}, \dots, m_{n-1}, -m_n), & \text{für } \ell(w) = 2n - l, \end{cases}$$

$$\lambda_\tau(w) = \begin{cases} -(m_l + n - l), & \text{für } \ell(w) = l;\\ \quad (m_l + n - l), & \text{für } \ell(w) = 2n - l, \end{cases}$$

sowie

$$\begin{aligned}
\nu_\tau(w^\pm) &= (m_0 + 1, \dots, m_{n-2} + 1, \pm(m_{n-1} + 1)),\\
\lambda_\tau(w^\pm) &= \mp m_n.
\end{aligned}$$

Satz 5.2. *Es sei $\gamma \neq e$ aus Γ. Dann ist*

$$\operatorname{tr}\tau(\gamma) = \frac{e^{-\rho\ell(\gamma)}}{\det(\mathrm{Id} - \mathrm{Ad}(m_\gamma a_\gamma)_{\overline{\mathfrak{n}}})} \sum_{w \in W^1} (-1)^{\ell(w)} \operatorname{tr}\nu_\tau(w)(m_\gamma)\, e^{-\lambda_\tau(w)\ell(\gamma)}, \tag{5.9}$$

wobei $\gamma \sim m_\gamma a_\gamma \in MA$.

Beweis. Nach Theorem 5.1 ist

$$\sum_{l=0}^{2n}(-1)^l\Lambda^l\mathfrak{n}^*\otimes V_\tau \cong \sum_{w\in W^1}(-1)^{\ell(w)}V_{\tau(w)}.$$

Das heißt, für alle $\gamma\neq e$ ist

$$\sum_{l=0}^{2n}(-1)^l\nu_l(m_\gamma)\,\mathrm{e}^{-l\ell(\gamma)}\otimes\tau(m_\gamma a_\gamma)\cong\sum_{w\in W^1}(-1)^{\ell(w)}\tau(w)(m_\gamma a_\gamma),$$

wobei $\tau(w)(m_\gamma a_\gamma)=\nu_\tau(w)(m_\gamma)\,\mathrm{e}^{(-\lambda_{\tau(w)}-\rho)\ell(\gamma)}$.
Aus

$$\sum_{l=0}^{2n}(-1)^l\operatorname{tr}\nu_l(m_\gamma)\,\mathrm{e}^{-l\ell(\gamma)}=\det(\mathrm{Id}-\mathrm{Ad}(m_\gamma a_\gamma)_{\overline{\mathfrak{n}}})$$

erhalten wir sofort die Aussage. □

Zurück zum Ausdruck (5.3)**:**
Durch Einschränkung beider Seiten von (5.4) auf M erhalten wir den folgenden Satz.

Satz 5.3. *Es sei $\tau\colon G\to\mathrm{GL}(V_\tau)$ eine endlichdimensionale Darstellung von G vom höchsten Gewicht Λ_τ. Für die M-Module $\Lambda^l\mathfrak{n}^*\otimes V_\tau$ gilt*

$$\sum_{l=0}^{2n}(-1)^l\Lambda^l\mathfrak{n}^*\otimes V_\tau\cong\sum_{w\in W^1}(-1)^{\ell(w)}V_{\tau(w)},\tag{5.10}$$

wobei die M-Module $V_{\tau(w)}$ vom höchsten Gewicht $w(\Lambda_\tau+\rho_\mathfrak{g})\restriction_\mathfrak{t}-\rho_\mathfrak{m}$ sind, und W^1 wie in (5.5).

Damit vereinfacht sich Ausdruck (5.3) zu

$$\widehat{k_t^\tau}(\xi,\lambda)=\mathrm{e}^{-t(-\pi_{\xi,\lambda}(\Omega)+\tau(\Omega))}\sum_{w\in W^1}(-1)^{\ell(w)+1}\dim(W_\xi\otimes V_{\tau(w)})^M.$$

Nach der Spurformel (3.9) ist

$$\begin{aligned}J_\tau(t)=\operatorname{Vol}(X)k_t^\tau(e)+\frac{1}{2\pi}\sum_{\{\gamma\}\neq\{e\}}\ell(\gamma_0)\frac{\mathrm{e}^{-\rho\ell(\gamma)}}{\det(\mathrm{Id}-\mathrm{Ad}(m_\gamma a_\gamma)_{\overline{\mathfrak{n}}})}\\ \cdot\sum_{\xi\in\widehat{M}}\operatorname{tr}\xi(m_\gamma)\int_\mathbb{R}\widehat{k_t^\tau}(\xi,\lambda)\,\mathrm{e}^{i\ell(\gamma)\lambda}\,\mathrm{d}\lambda.\end{aligned}\tag{5.11}$$

Wir nennen dabei den ersten Summanden den Beitrag der Identität und den zweiten den hyperbolischen Beitrag.

Wir betrachten zunächst den *hyperbolischen Beitrag.*
Zuerst wollen wir daran erinnern [Wal73, Lemma 5.6.4], dass der infinitesimale Charakter

$\tau(\Omega)$ einer endlichdimensionalen Darstellung $\tau\colon G \to \mathrm{GL}(V_\tau)$ vom höchsten Gewicht Λ_τ wie folgt gegeben ist

$$\tau(\Omega) = \|\Lambda_\tau + \rho_{\mathfrak{g}}\|^2 - \|\rho_{\mathfrak{g}}\|^2,$$

wobei $\rho_{\mathfrak{g}} = \frac{1}{2}\sum\alpha$ und die Summe über positive Wurzeln von G gebildet wird:

$$\rho_{\mathfrak{g}} = (n, n-1, \ldots, 1, 0) = \rho\epsilon_0 + \rho_{\mathfrak{m}} \in \mathbb{R}^{n+1}.$$

Weiter ist

$$\nu_\tau(w)(\Omega_M) = \|w(\Lambda_\tau + \rho_{\mathfrak{g}})\restriction_{\mathfrak{t}}\|^2 - \|\rho_{\mathfrak{m}}\|^2$$

der infinitesimale Charakter der irreduziblen Darstellung $\nu_\tau(w)\colon M \to \mathrm{GL}(V_{\tau(w)})$ vom höchsten Gewicht $w(\Lambda_\tau + \rho_{\mathfrak{g}})\restriction_{\mathfrak{t}} - \rho_{\mathfrak{m}}$, wobei Ω_M das Casimir-Element von M ist. Nach Definition (5.8) von $\lambda_\tau(w)$ folgt damit

$$\lambda_\tau(w)^2 = \|\Lambda_\tau + \rho_{\mathfrak{g}}\|^2 - \|w(\Lambda_\tau + \rho_{\mathfrak{g}})\restriction_{\mathfrak{t}}\|^2. \tag{5.12}$$

Wir bemerken, dass die Fourier-Transformierte $\widehat{k_t^\tau}(\xi, \lambda)$ nur dann nicht verschwindet, wenn die Darstellung ξ von M äquivalent zu $\nu_\tau(w)$ ist. Es ist vielmehr,

$$\dim(W_\xi \otimes V_{\tau(w)})^M = 1$$

genau dann, wenn $\xi \cong \nu_\tau(w)$.
Aus

$$\pi_{\xi,\lambda}(\Omega) = -\lambda^2 - \rho^2 + \|\Lambda_\xi + \rho_{\mathfrak{m}}\|^2 - \|\rho_{\mathfrak{m}}\|^2$$

folgt mit obigen Überlegungen schließlich

$$\begin{aligned}\sum_{\xi\in\widehat{M}} \operatorname{tr}\xi(m_\gamma) \int_{\mathbb{R}} \widehat{k_t^\tau}(\xi,\lambda)\, \mathrm{e}^{i\lambda\ell(\gamma)}\, \mathrm{d}\lambda \\ = \sum_{w\in W^1} (-1)^{\ell(w)+1}\, \mathrm{e}^{-t\lambda_\tau(w)^2} \operatorname{tr}\nu_\tau(w)(m_\gamma) \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-t\lambda^2}\, \mathrm{e}^{i\lambda\ell(\gamma)}\, \mathrm{d}\lambda.\end{aligned}$$

Aus

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-t\lambda^2}\, \mathrm{e}^{il\lambda}\, \mathrm{d}\lambda = \frac{\mathrm{e}^{-l^2/4t}}{(4\pi t)^{1/2}}, \qquad t > 0 \tag{5.13}$$

folgt, dass jeder Summand $\{\gamma\} \neq \{e\}$ in (5.11) gleich

$$\sum_{w\in W^1} (-1)^{\ell(w)+1}\, \mathrm{e}^{-t\lambda_\tau(w)^2}\, \ell(\gamma_0) \frac{\operatorname{tr}\nu_\tau(w)(m_\gamma)\, \mathrm{e}^{-\rho\ell(\gamma)}}{\det(\mathrm{Id} - \mathrm{Ad}(m_\gamma a_\gamma)_{\overline{\mathfrak{n}}})} \frac{\mathrm{e}^{-\ell(\gamma)^2/4t}}{(4\pi t)^{1/2}}$$

ist.
Wir kommen zur Bestimmung des Beitrags der Identität. In Abschnitt 3.2 haben wir Harish-Charndra's Plancherel-Theorem für $f \in C^2(G)$ erwähnt. Weil der Wärmeleitungsoperator von $\widetilde{\Delta}_r(\tau)$ für alle $p > 0$ ein Element von $C^p(G)$ ist, können wir die Umkehrformel von Harish-Chandra zur Berechnung des Beitrags der Identität benutzen. Wir bemerken, dass es für $G = \mathrm{SO}_e(2n+1, 1)$ keine Darstellung der diskreten Reihen gibt und das Plancherel-Maß der Darstellung der Hauptreihe $\pi_{\xi,\lambda}$ das Plancherel-Polynom ist.

Satz 5.4. *Es gilt*

$$k_t^\tau(e) = \sum_{w\in W^1} (-1)^{\ell(w)+1} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-t(\lambda^2+\lambda_\tau(w)^2)}\, P(i\lambda;\nu_\tau(w))\mathrm{d}\lambda, \tag{5.14}$$

wobei $P(i\lambda;\nu_\tau(w))$ das Plancherel-Polynom ist.

Beweis. Die Umkehrformel von Harish-Chandra im vorliegenden Fall ist von der folgenden Form:

$$k_t^\tau(e) = \sum_{\xi\in\widehat{M}} \int_{\mathbb{R}} \widehat{k_t^\tau}(\xi,\lambda)\mathrm{d}\mu_\xi(\lambda),$$

wobei das Plancherel-Maß $\mathrm{d}\mu_\xi(\lambda) = P(i\lambda;\xi)\mathrm{d}\lambda$ durch das Plancherel-Polynom

$$P(i\lambda;\xi) = \dim(W_\xi) \prod_{\alpha\in\Delta_A^+} (\Lambda_\xi + \rho_{\mathfrak{m}} + i\lambda, H_\alpha) \tag{5.15}$$

beschrieben ist, siehe [Wal73, Theorem 7.12.9]. Analog zu oben erhalten wir, dass nur für $\xi \cong \nu_\tau(w)$ die Fourier-Transformierte $\widehat{k_t^\tau}(\xi,\lambda)$ nicht verschwindet. Ferner ist

$$-\pi_{\nu_\tau(w),\lambda}(\Omega) + \tau(\Omega) = \lambda^2 + \lambda_\tau(w)^2.$$

Daraus folgt die Behauptung. □

Wir fassen die Ergebnisse dieses Abschnitts zu folgendem Theorem zusammen:

Theorem 5.5. *Es sei X ein geschlossener hyperbolischer Raum. Weiter sei (τ, V_τ) eine irreduzible Darstellung von G und $E^\tau \to X$ das durch τ assoziierte Vektorraumbündel. Es sei*

$$J_\tau(t) = \sum_{r=0}^{2n+1} (-1)^r r \operatorname{Tr} \mathrm{e}^{-t\Delta_r(\tau)}.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} J_\tau(t) = \sum_{w\in W^1} (-1)^{\ell(w)+1} \Bigg(&\mathrm{Vol}(X) \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-t(\lambda^2+\lambda_\tau(w)^2)}\, P(i\lambda;\nu_\tau(w))\mathrm{d}\lambda \\ &+ \sum_{\{\gamma\}\neq\{e\}} \ell(\gamma_0) L(\gamma;\nu_\tau(w))\, \mathrm{e}^{-t\lambda_\tau(w)^2} \frac{\mathrm{e}^{-\ell(\gamma)^2/4t}}{(4\pi t)^{1/2}} \Bigg), \end{aligned} \tag{5.16}$$

wobei

$$L(\gamma;\nu_\tau(w)) = \frac{\operatorname{tr} \nu_\tau(w)(m_\gamma)\, \mathrm{e}^{-\rho\ell(\gamma)}}{\det(\mathrm{Id} - \mathrm{Ad}(m_\gamma a_\gamma)_{\overline{\mathfrak{n}}})}.$$

6 Die induzierte Ruellesche Zetafunktion $R^\tau(z)$

Es sei $\tau\colon G \to \mathrm{GL}(V_\tau)$ eine irreduzible Darstellung von G vom höchsten Gewicht $\Lambda_\tau = (m_0, \dots, m_n)$ mit

$$m_0 \geq m_1 \geq \ldots \geq |m_n| \neq 0.$$

Wir definieren die *τ-induzierte* Ruellesche Zetafunktion $Z_R^\tau(s)$ durch

$$Z_R^\tau(s) := \prod_{\substack{\{\gamma\}\neq\{e\}\\ \text{prim}}} \det(\mathrm{Id} - \tau(\gamma)\,\mathrm{e}^{-s\ell(\gamma)})^{-1}$$

für $\mathrm{Re}(s) > 2\rho + c_\tau$, wobei c_τ der kritische Exponent von χ ist, siehe Abschnitt 1. Wir bemerken, dass c_τ die erste Komponente von Λ_τ ist.
Für $\lambda \in \mathbb{C}$ sei $\chi_\lambda\colon A \to \mathrm{GL}_1(\mathbb{C})$ der Charakter, der durch $\chi_\lambda(a) = a^\lambda$ definiert ist. Weil M und A vertauschen, zerfällt die Einschränkung $\tau{\restriction}_{MA}\colon MA \to \mathrm{GL}(V_\tau)$ in eine Summe von Tensorprodukten $\xi \otimes \chi_\lambda$ irreduzibler Darstellungen $\xi \in \widehat{M}$ und χ_λ von A. Mit $I(\tau)$ bezeichnen wir die Indexmenge der Zerlegung von $\tau\colon G \to \mathrm{GL}(V_\tau)$ in irreduzible MA-Darstellungen

$$\tau{\restriction}_{MA} = \bigoplus_{(\xi,\chi_\lambda)\in I(\tau)} \xi \otimes \chi_\lambda.$$

Damit ist

$$\det(\mathrm{Id} - \tau(\gamma)\,\mathrm{e}^{-z\ell(\gamma)}) = \prod_{(\xi,\chi_\lambda)\in I(\tau)} \det(\mathrm{Id} - \xi(m_\gamma)\,\mathrm{e}^{-(z-\lambda)\ell(\gamma)}).$$

Daraus folgt

$$Z_R^\tau(z) = \prod_{(\xi,\chi_\lambda)\in I(\tau)} Z_R(z-\lambda;\xi),$$

wobei $Z_R(z;\xi)$ die Ruellesche Zetafunktion von der folgenden Form ist

$$Z_R(z;\xi) = \prod_{\substack{\{\gamma\}\neq\{e\}\\ \text{prim}}} \det(\mathrm{Id} - \xi(m_\gamma)\,\mathrm{e}^{-z\ell(\gamma)})^{-1},$$

für $\mathrm{Re}(z) > 2\rho$. Mittels der Produktdarstellung (1.12) für $Z_R(z-\lambda;\xi)$ erhalten wir

$$Z_R^\tau(z) = \prod_{(\xi,\chi_\lambda)\in I(\tau)} \prod_{l=0}^{2n} Z_S(z-\lambda-\rho+l;\xi\otimes\nu_l)^{(-1)^{l+1}}. \tag{6.1}$$

Diese Produktdarstellung der τ-induzierten Ruelleschen Zetafunktion $Z_R^\tau(z)$ kann mittels Satz 5.2 wesentlich vereinfacht werden.

Satz 6.1. *Für die τ-induzierte Ruellesche Zetafunktion $Z_R^\tau(z)$ gilt:*

$$Z_R^\tau(z) = \prod_{w\in W^1} Z_S(z+\lambda_\tau(w);\nu_\tau(w))^{(-1)^{\ell(w)+1}}. \tag{6.2}$$

Beweis. Nach Definition von $Z_R^\tau(z)$ ist

$$\log Z_R^\tau(z) = \sum_{\{\gamma\}\neq\{e\}} \frac{1}{\mu(\gamma)} \operatorname{tr}\tau(\gamma)\, \mathrm{e}^{-z\ell(\gamma)},$$

wobei $\mu(\gamma)$ die Multiplizität von γ ist. Aus (5.9) folgt

$$\begin{aligned}\log Z_R^\tau(z) &= \sum_{w\in W^1} (-1)^{\ell(w)+1} \sum_{\{\gamma\}\neq\{e\}} -\frac{1}{\mu(\gamma)} \frac{\operatorname{tr}\nu_\tau(w)(m_\gamma)\,\mathrm{e}^{-\rho\ell(\gamma)}}{\det(\mathrm{Id}-\mathrm{Ad}(m_\gamma a_\gamma)_{\overline{\mathfrak{n}}})}\, \mathrm{e}^{-(z+\lambda_\tau(w))\ell(\gamma)}\\ &= \sum_{w\in W^1} (-1)^{\ell(w)+1} \log Z_S(z+\lambda_\tau(w);\nu_\tau(w)).\end{aligned}$$ □

Bemerkung. Die Produktdarstellung (6.2) der induzierten Ruelleschen Zetafunktion $Z_R^\tau(z)$ ist eines der Hauptresultate von Bröcker [Brö98, Satz 17]. Sein Beweis basiert auf einer aufwendigen, schwierig zu überblickenden kombinatorischen Rechnung, im Wesentlichen bestehend aus dem Herauskürzen der auftretenden Faktoren in (6.1).

Wir bemerken, dass $\nu_\tau(w)$ für alle $w\in W^1$ nicht invariant bezüglich der Wirkung von $w_A\in W_A$ ist, was aus der Voraussetzung folgt, dass das höchste Gewicht $\Lambda_\tau=(m_0,\dots,m_n)$ von τ in der letzten Komponente m_n nicht verschwindet. Desweiteren sind aus dem gleichen Grund $\lambda_\tau(w)\neq 0$ für alle $w\in W^1$.
Es sei $\tau_\theta\colon G\to \mathrm{GL}(V_\tau^\theta)$ die irreduzible Darstellung von G vom höchsten Gewicht $\Lambda_\tau^\theta = (m_0,\dots,m_{n-1},-m_n)$. Es seien

$$\nu_{\tau_\theta}(w) := w(\Lambda_\tau^\theta+\rho_{\mathfrak{g}})\restriction_{\mathfrak{t}} - \rho_{\mathfrak{m}}, \quad \lambda_{\tau_\theta}(w) := -w(\Lambda_\tau^\theta+\rho_{\mathfrak{g}})\restriction_{\mathfrak{a}}$$

für $w\neq w^\pm\in W^1$ wie in (5.8) und

$$\nu_{\tau_\theta}(w^\pm) := w^\mp(\Lambda_\tau^\theta+\rho_{\mathfrak{g}})\restriction_{\mathfrak{t}} - \rho_{\mathfrak{m}}, \quad \lambda_{\tau_\theta}(w^\pm) := -w^\mp(\Lambda_\tau^\theta+\rho_{\mathfrak{g}})\restriction_{\mathfrak{a}}.$$

Dann ist $\nu_{\tau_\theta}(w) = w_A\nu_\tau(w)$ und $\lambda_{\tau_\theta}(w)=\lambda_\tau(w)$ für alle $w\in W^1$.
Wir betrachten die τ_θ-induzierte Ruellesche Zetafunktion $Z_R^{\tau_\theta}(z)$.
Analog zu Satz 6.1 erhalten wir dann folgende Produktdarstellung

$$Z_R^{\tau_\theta}(z) = \prod_{w\in W^1} Z_S(z+\lambda_\tau(w); w_A\nu_\tau(w))^{(-1)^{\ell(w)+1}}. \tag{6.2$_\theta$}$$

Wir erinnern an Definition (1.9) der Selbergschen Zetafunktion $S(z;\xi)$ für $\xi\not\equiv w_A\xi$:

$$S(z;\nu_\tau(w)) = Z_S(z;\nu_\tau(w))Z_S(z;w_A\nu_\tau(w)),$$

die wir von nun an mit $S(z;w)$ bezeichnen werden.
Es sei

$$R^\tau(z) := Z_R^\tau(z)\cdot Z_R^{\tau_\theta}(z).$$

Dann erhalten wir aus (6.2) und (6.2$_\theta$) den folgenden Satz.

Satz 6.2. *Für die Ruellesche Zetafunktion $R^\tau(z)$ gilt*

$$R^\tau(z) = \prod_{w\in W^1} S(z+\lambda_\tau(w);w)^{(-1)^{\ell(w)+1}}. \tag{6.3}$$

7 Die virtuelle Theta-Funktion $H(t; w)$

In diesem Abschnitt werden wir virtuelle Theta-Funktionen konstruieren, mit deren Hilfe die Selbergsche Zetafunktion $S(z; w)$ meromorph auf $\mathbb{C}$ fortgesetzt wird. Den Ausgangspunkt dieser Methode bildet die Arbeit von Fried [Fri86a]. In [MS] haben Moscovici/Stanton die Konstruktion der virtuellen Theta-Funktion weiter verallgemeinert.

7.1 Die Methode von Fried

Es sei $\varphi\colon \Gamma \to \mathrm{GL}(V_\varphi)$ eine unitäre azyklische Darstellung und E^φ das assoziierte flache Hermitesche Vektorraumbündel über X. Wie in Abschnitt 2 konstruieren wir den Hodge-Laplace-Operator $\Delta_r(\varphi)$ auf $\Lambda^r(X, E^\varphi)$. Es sei

$$\mathrm{e}^{-t\Delta_r(\varphi)}\colon L^2\Lambda^r(X, E^\varphi) \to L^2\Lambda^r(X, E^\varphi) \tag{7.1}$$

der Wärmeleitungsoperator von $\Delta_r(\varphi)$.

Theorem 7.1 ([Fri86a, Theorem 2]). *Für $l = 0, \dots, 2n$ sei*

$$I_l^\varphi(t) \coloneqq \mathrm{Vol}(X)\dim(V_\varphi)\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-t(\lambda^2+(n-l)^2)}\, P(i\lambda; \nu_l)\mathrm{d}\lambda,$$

$$G_l^\varphi(t) \coloneqq \sum_{\{\gamma\}\neq\{e\}} \ell(\gamma_0)L^\varphi(\gamma; \nu_l)\,\mathrm{e}^{-t(n-l)^2}\,\frac{\mathrm{e}^{-\ell(\gamma)^2/4t}}{(4\pi t)^{1/2}},$$

sowie $I_{-1}^\varphi(t) = G_{-1}^\varphi(t) = I_{2n+1}^\varphi(t) = G_{2n+1}^\varphi(t) = 0$.
Dann ist für alle $r = 0, \dots, 2n+1$

$$\mathrm{Tr}\,\mathrm{e}^{-t\Delta_r(\varphi)} = I_r^\varphi(t) + G_r^\varphi(t) + I_{r-1}^\varphi(t) + G_{r-1}^\varphi(t). \tag{7.2}$$

Wir definieren eine Funktion $J_\varphi(t)$ von $t > 0$ durch

$$J_\varphi(t) \coloneqq \sum_{r=0}^{2n+1} (-1)^r r\,\mathrm{Tr}\,\mathrm{e}^{-t\Delta_r(\varphi)}. \tag{7.3}$$

Aus Theorem 7.1 folgt sofort

$$J_\varphi(t) = \sum_{l=0}^{2n} (-1)^{l+1}(I_l^\varphi(t) + G_l^\varphi(t)). \tag{7.4}$$

Bemerkung. Diese Identität entspricht der Aussage von Theorem 5.5 für die triviale Darstellung $\mathbb{1}\colon G \to \mathrm{GL}(\mathbb{C})$ von G:

$$J_\varphi(t) = \sum_{w\in W^1} (-1)^{\ell(w)+1}(I^\varphi(t; w) + G^\varphi(t; w)),$$

wobei

$$I^\varphi(t; w) \coloneqq \mathrm{Vol}(X)\dim(V_\varphi)\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-t(\lambda^2+\lambda_{\mathbb{1}}(w)^2)}\, P(i\lambda; \nu_{\mathbb{1}}(w))\mathrm{d}\lambda,$$

$$G^{\varphi}(t;w) := \sum_{\{\gamma\}\neq\{e\}} \ell(\gamma_0) L^{\varphi}(s;\nu_{\mathbb{1}}(w))\, \mathrm{e}^{-t\lambda_{\mathbb{1}}(w)^2} \frac{\mathrm{e}^{-\ell(\gamma)^2/4t}}{(4\pi t)^{1/2}}.$$

Es ist zunächst nicht klar, dass $I_l^{\varphi}(t)$ und $G_l^{\varphi}(t)$ zulässige Funktionen für die Laplace-Mellin-Transformation sind, d.h., wir müssen das Verhalten dieser Funktionen für $t \to 0^+$ und $t \to \infty$ genau beschreiben. Die Funktion $I_l^{\varphi}(t)$ können wir explizit bestimmen und erhalten für $l \neq n$, dass $I_l^{\varphi}(t)$ eine zulässige Funktion für die Laplace-Mellin-Transformation ist und

$$z\,\mathrm{Pf}_{s=1} \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-t(z^2-(n-l)^2)}\, I_l^{\varphi}(t)\, t^{s-1} \mathrm{d}t = \pi \operatorname{Vol}(X) P(z;\nu_l), \tag{7.5}$$

siehe Satz 8.3 unten.

Damit stellt nur noch die Zulässigkeit von $G_l^{\varphi}(t)$ ein Problem dar. Eine Lösung dieses Problems erhält man aus der Hodge-Zerlegung von $\Delta_r(\varphi)$. Wir definieren den Operator $D_r(\varphi)$ in $\Lambda^r(X, E^{\varphi})$ durch Einschränkung von $\Delta_r(\varphi)$ auf die koexakte r-Differentialformen mit Werten in E^{φ}, d.h.,

$$D_r(\varphi) := \Delta_r(\varphi)\restriction_{\operatorname{Im}(\delta_{\varphi})}.$$

Für den Operator $D_r(\varphi)$ in $\overline{\operatorname{Im}(\delta_{\varphi})}$ gilt:

1) $\langle D_r(\varphi)\phi, \psi\rangle = \langle \phi, D_r(\varphi)\psi\rangle, \quad \phi, \psi \in \operatorname{Im}(\delta_{\varphi})$;

2) $\langle D_r(\varphi)\phi, \phi\rangle = \|\mathrm{d}_{\varphi}\phi\|^2 > 0, \quad \phi \in \operatorname{Im}(\delta_{\varphi})$;

d.h., $D_r(\varphi)$ ist formal selbstadjungiert und positiv. Aus der Konstruktion von $D_r(\varphi)$ folgt, dass $D_r(\varphi)$ ein diskretes Spektrum hat.

Wir folgen den Ausführungen aus Abschnitt A. Es sei $\mathrm{e}^{-tD_r(\varphi)}$ der Wärmeleitungsoperator von $D_r(\varphi)$. Wir definieren die Theta-Funktion $H_l^{\varphi}(t)$ für $t > 0$ von $D_l(\varphi)$ durch

$$H_l^{\varphi}(t) := \operatorname{Tr} \mathrm{e}^{-tD_l(\varphi)}. \tag{7.6}$$

Aus der Hodge-Zerlegung folgt $\Delta_l(\varphi) \cong D_l(\varphi) \oplus D_{l-1}(\varphi)$ und damit

$$\operatorname{Tr} \mathrm{e}^{-t\Delta_l(\varphi)} = H_l^{\varphi}(t) + H_{l-1}^{\varphi}(t). \tag{7.7}$$

Aus Definition (7.3) von $J_{\varphi}(t)$ folgt mit (7.7) schließlich

$$J_{\varphi}(t) = \sum_{l=0}^{2n} (-1)^{l+1} H_l^{\varphi}(t). \tag{7.8}$$

Damit erhalten wir die Spurformel von $H_l^{\varphi}(t)$.

Satz 7.2. *Es sei* $0 \leq l \leq 2n$. *Dann gilt:*

$$H_l^{\varphi}(t) = I_l^{\varphi}(t) + G_l^{\varphi}(t), \tag{7.9}$$

wobei

$$\begin{aligned} I_l^{\varphi}(t) &= \mathrm{e}^{-t(n-l)^2}\,\mathrm{Vol}(X)\dim(V_\varphi)\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-t\lambda^2} P(i\lambda;\nu_l)\mathrm{d}\lambda, \\ G_l^{\varphi}(t) &= \mathrm{e}^{-t(n-l)^2}\sum_{\{\gamma\}\neq\{e\}} \ell(\gamma_0)L^{\varphi}(s;\nu_l)\frac{\mathrm{e}^{-\ell(\gamma)^2/4t}}{(4\pi t)^{1/2}}. \end{aligned} \tag{7.10}$$

Beweis. Wir stellen $H_l^{\varphi}(t)$ als eine alternierende Summe der Theta-Funktionen von $\Delta_r(\varphi)$ dar und benutzen dann Theorem 7.1. Aus (7.7) folgt

$$H_l^{\varphi}(t) = \sum_{r=0}^{l}(-1)^{l-r}\mathrm{Tr}\,\mathrm{e}^{-t\Delta_{l-r}(\varphi)}.$$

Daraus erhalten wir sofort die Aussage. □

Satz 7.3. *Es gilt*

$$T^{\mathrm{an}}(\varphi)^2 = \prod_{l=0}^{2n}\big(\det D_l(\varphi)\big)^{(-1)^{l+1}}. \tag{7.11}$$

Beweis. In Abschnitt A haben wir den Logarithmus der regularisierten Determinante eines strikt positiven elliptischen Differentialoperators der Ordnung zwei auf einer kompakten Mannigfaltigkeit ungerader Dimension durch die Mellin-Transformation seiner Theta-Funktion an der Stelle $s = 0$ definiert, d.h.,

$$-\log\det D_l(\varphi) = \int_0^{\infty} H_l^{\varphi}(t)t^{s-1}\mathrm{d}t\Big|_{s=0}.$$

Nach Definition (7.3) ist $-\log T^{\mathrm{an}}(\varphi)^2$ die Mellin-Transformierte von $J_\varphi(t)$ an der Stelle $s = 0$. Aus (7.8) folgt

$$\begin{aligned} -\log T^{\mathrm{an}}(\varphi)^2 &= \sum_{l=0}^{2n}(-1)^{l+1}\int_0^{\infty} H_l^{\varphi}(t)\,t^{s-1}\Big|_{s=0} \\ &= \sum_{l=0}^{2n}(-1)^{l}\log\det D_l(\varphi). \end{aligned}$$

□

Jetzt schreiben wir (7.9) als

$$H_l^{\varphi}(t) - I_l^{\varphi}(t) = G_l^{\varphi}(t) \tag{7.12}$$

und bemerken, dass jeder der Summanden der linken Seite exponentiell fallend für $t \to \infty$ ist und $G_l^{\varphi}(t) = O(\mathrm{e}^{-c/t})$ für $t \to 0^+$. Letzter Aussage folgt sofort aus Lemma 3.9, siehe auch Satz 7.8 unten.

Damit können wir eine meromorphe Funktion auf $\mathbb{C}$ durch die Partie Finie von der Laplace-Mellin-Transformation an der Stelle $s = 1$ beider Seiten von (7.12) definieren. Daraus erhält man die meromorphe Fortsetzung von $Z_S^{\varphi}(z;\nu_l)$ und folgende Determinantenformel

$$Z_S^{\varphi}(z;\nu_l) = \det(D_l(\varphi) - (n-l)^2 + z^2)\exp\Big(-2\pi\,\mathrm{Vol}(X)\int_0^{z} P(\lambda;\nu_l)\mathrm{d}\lambda\Big),$$

siehe Theorem 8.9 unten oder Theorem 4 in [Fri86a]. Aus der Produktdarstellung (1.11) erhalten wir die meromorphe Fortsetzung von $Z_R^\varphi(z)$. Mittels der Determinantenformel von $Z_S^\varphi(z+n-l;\nu_l)$ zeigt man, dass die Ruellesche Zetafunktion $Z_R^\varphi(z)$ in $z=0$ regulär ist. Aus Satz 7.3 folgt sofort

$$Z_R^\varphi(0) = T^{\mathrm{an}}(\varphi)^2.$$

7.2 Die virtuelle Theta-Funktion $H(t;w)$

Es seien $R(K)$ und $R(M)$ die Darstellungsringe von K und M. Zur Definition des Rings der virtuellen Darstellungen einer kompakten Lieschen Gruppe verweisen wir auf Abschnitt 4.10 in [Wal73]. Die kanonische Einbettung $i\colon M \hookrightarrow K$ induziert eine Abbildung $i_*\colon R(K)\to R(M)$. Die Wirkung der reduzierten Weyl-Gruppe W_A auf $\widehat{M}$ durch

$$w_A(k_1,\dots,k_n) = (k_1,\dots,k_{n-1},-k_n),$$

wobei $\Lambda_\xi = (k_1,\dots,k_n)$ das höchste Gewicht einer Darstellung $\xi\in\widehat{M}$ ist [BO95, Seite 20], setzen wir auf $R(M)$ fort. Es sei $R(M)^{W_A}$ der Teilring der W_A-invarianten virtuellen Darstellungen von M.

Satz 7.4. *Die Abbildung $i_*\colon R(K)\to R(M)^{W_A}$ ist ein Isomorphismus, d.h.,*

$$R(M)^{W_A} \cong R(K).$$

Beweis. Siehe Proposition 1.1 in [BO95]. □

Zur Konstruktion der virtuellen Theta-Funktion betrachten wir zunächst die folgende Funktion

$$J_{\tau_\theta}(t) := \sum_{r=0}^{2n+1} (-1)^r r \operatorname{Tr} \mathrm{e}^{-t\Delta_r(\tau_\theta)},$$

wobei $\Delta_r(\tau_\theta)$ der Hodge-Laplace-Operator auf $\Lambda^r(X,E^\tau)$ wie auf Seite 37 ist.
Aus Theorem 5.5 folgt

$$J_{\tau_\theta}(t) = \sum_{w\in W^1} (-1)^{\ell(w)+1} \mathrm{e}^{-t\lambda_{\tau_\theta}(w)^2}\Bigg(\operatorname{Vol}(X)\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-t\lambda^2} P(i\lambda;\nu_{\tau_\theta}(w))\mathrm{d}\lambda \\ + \sum_{\{\gamma\}\neq\{e\}} \ell(\gamma_0) L(\gamma;\nu_{\tau_\theta}(w)) \frac{\mathrm{e}^{-\ell(\gamma)^2/4t}}{(4\pi t)^{1/2}}\Bigg),$$

wobei

$$\nu_{\tau_\theta}(w) := w(\Lambda_\tau^\theta+\rho_{\mathfrak{g}})\restriction_{\mathfrak{t}} - \rho_{\mathfrak{m}}, \quad \lambda_{\tau_\theta}(w) := -w(\Lambda_\tau^\theta+\rho_{\mathfrak{g}})\restriction_{\mathfrak{a}}$$

für $w\neq w^\pm \in W^1$ wie in (5.8) und

$$\nu_{\tau_\theta}(w^\pm) := w^\mp(\Lambda_\tau^\theta+\rho_{\mathfrak{g}})\restriction_{\mathfrak{t}} - \rho_{\mathfrak{m}}, \quad \lambda_{\tau_\theta}(w^\pm) := -w^\mp(\Lambda_\tau^\theta+\rho_{\mathfrak{g}})\restriction_{\mathfrak{a}}.$$

Dann ist für alle $w \in W^1$

$$\nu_{\tau_\theta}(w) = w_A \nu_\tau(w) \quad \text{und} \quad \lambda_{\tau_\theta}(w) = \lambda_\tau(w). \tag{7.13}$$

Für alle $w \in W^1$ ordnen wir $\nu_\tau(w) \oplus \nu_{\tau_\theta}(w) \in R(M)^{W_A}$ nach Satz 7.4 die virtuelle Darstellung $\omega(w)$ zu durch

$$\omega(w) := i_*^{-1}(\nu_\tau(w) \oplus \nu_{\tau_\theta}(w)) \in R(K). \tag{7.14}$$

Aus Lemma 4.10.6 in [Wal73] folgt

$$\omega(w) = \sum_{\sigma \in \widehat{K}} m_\sigma(w)\sigma, \quad m_\sigma(w) \in \mathbb{Z}. \tag{7.15}$$

Für jeden K-Modul V_σ in (7.15) betrachten wir den Operator

$$\mathrm{e}^{-t\widetilde{A}_\sigma} := \mathrm{e}^{-t(-R(\Omega)+\tau(\Omega)\,\mathrm{Id})}$$

im Hilbertraum $(L^2(G) \otimes V_\sigma)^K$. Nach (3.12) entspricht $-R(\Omega)$ auf $(L^2(G) \otimes V_\sigma)^K$ bis auf einen Skalar dem Bochner-Laplace-Operator auf $C^\infty(\widetilde{E}^\sigma)$, genauer ist $-R(\Omega) = \widetilde{\Delta}_\sigma - \sigma(\Omega_K)\,\mathrm{Id}$, wobei Ω_K das Casimir-Element von K ist. Damit ist

$$\mathrm{e}^{-t\widetilde{A}_\sigma} = \mathrm{e}^{-t(\widetilde{\Delta}_\sigma + (\tau(\Omega)-\sigma(\Omega_K))\,\mathrm{Id})} \tag{7.16}$$

ein Operator in $L^2(\widetilde{E}^\sigma)$. Wir folgen den Ausführungen in Abschnitt 3.2. Danach ist

$$\mathrm{e}^{-t\widetilde{A}_\sigma} \colon L^2(\widetilde{E}^\sigma) \to L^2(\widetilde{E}^\sigma), \quad t > 0$$

ein Glättungsoperator, der mit der rechtsregulären Darstellung von G auf $(L^2(G) \otimes V_\sigma)^K$ kommutiert. Daraus folgt

$$(\mathrm{e}^{-t\widetilde{A}_\sigma}\,\phi)(g) = \int_G \widetilde{K}_t^\sigma(g^{-1}g')\phi(g')\mathrm{d}g'$$

für $\phi \in (L^2(G) \otimes V_\sigma)^K$, wobei $\widetilde{K}_t^\sigma \colon G \to \mathrm{End}(V_\sigma)$ eine C^∞-Abbildung ist, die die Äquivarianz-Bedingung (3.14) erfüllt. Aus (7.16) folgt

$$\widetilde{K}_t^\sigma \in (C^1(G) \otimes \mathrm{End}(V_\sigma))^{K\times K}. \tag{7.17}$$

Es sei

$$\mathrm{e}^{-t\widetilde{\Delta}(w)} := \sum_{\sigma\in\widehat{K}} |m_\sigma(w)|\,\mathrm{e}^{-t\widetilde{A}_\sigma}$$

der Wärmeleitungsoperator in $(L^2(G)\otimes V(w))^K$, wobei $V(w)$ der virtuelle K-Modul (7.14) ist. Es sei

$$\widetilde{K}_t^w = \sum_{\sigma\in\widehat{K}} |m_\sigma(w)| \widetilde{K}_t^\sigma.$$

Dann ist

$$K^w(t; x, x') := \sum_{\gamma\in\Gamma} \widetilde{K}_t^w(g^{-1}\gamma g'), \quad x = \Gamma gK,\ x' = \Gamma g'K$$

eine C^∞-Abbildung auf $X \times X$ mit Werten in $E(w) \boxtimes E(w)^*$, wobei $E(w)$ das durch den K-Modul $V(w)$ induzierte Vektorraumbündel über X ist.
Wir definieren $\mathrm{e}^{-t\Delta(w)}$ in $\sum_{\sigma\in\widehat{K}} |m_\sigma(w)|(L^2(\Gamma\backslash G) \otimes V_\sigma)^K$ durch

$$(\mathrm{e}^{-t\Delta(w)}\,\phi) = \int_X K^w(t; x, y)\phi(y)\mathrm{d}\,\mathrm{vol}(y).$$

Ferner können wir nach (7.16) den Integraloperator $\mathrm{e}^{-t\Delta(w)}$ mit dem C^∞-Kern $K^w(t; x, y)$ auch schreiben als

$$\mathrm{e}^{-t\Delta(w)} = R_\Gamma(\widetilde{K}_t^w), \tag{7.18}$$

wobei R_Γ die rechstreguläre Darstellung in $L^2(\Gamma\backslash G)$ ist.
Es sei

$$k_t^\sigma := \operatorname{tr} \widetilde{K}_t^\sigma. \tag{7.19}$$

Die ganzen Zahlen $m_\sigma(w)$ in (7.15) behandeln wir in üblicher Weise: Für positive $m_\sigma(w)$ nehmen wir eine direkte Summe der zugehörigen K-Module V_σ, für negative bilden wir eine direkte Summe der zugehörigen K-Module V_σ und benutzen die $\mathbb{Z}_2$-Graduierung zur Berechnung der Spur. Das heißt, wir betrachten K-Module

$$V(w)^\pm := \sum_{\mathrm{sgn}(m_\sigma(w))=\pm 1} |m_\sigma(w)| V_\sigma.$$

Dann ist $\widetilde{E}(w) = \widetilde{E}(w)^+ \oplus \widetilde{E}(w)^-$ das zu $\omega(w)$ assoziierte $\mathbb{Z}_2$-graduierte homogene Vektorraumbündel über $\widetilde{X}$. Mit dieser Vereinbarung definieren wir den *virtuellen Wärmeleitungskern* k_t^w bezüglich $w \in W^1$ durch

$$k_t^w := \sum_\sigma m_\sigma(w) k_t^\sigma. \tag{7.20}$$

Wir definieren die *virtuelle Theta-Funktion* bezüglich $w \in W^1$ durch

$$H(t; w) := \mathrm{Tr_s}\, \mathrm{e}^{-t\Delta(w)},$$

wobei $\mathrm{Tr_s}$ die super-Spur bezüglich dieser $\mathbb{Z}_2$-Graduierung ist. Das heißt

$$H(t; w) = \sum_{\sigma\in\widehat{K}} m_\sigma(w) \mathrm{Tr}\, \mathrm{e}^{-tA_\sigma},$$

wobei A_σ der durch $\widetilde{A}_\sigma$ induzierte Operator in $C^\infty(E^\sigma)$ ist.

Bemerkung. In Abschnitt 7.1 ist keine Verdopplung wie oben dargestellt notwendig, weil für alle $l \neq n$ die Darstellungen $\nu_l \colon M \to \mathrm{GL}(\Lambda^l \mathbb{R}^{2n})$ invariant bezüglich W_A sind. Für die Spin-Darstellungen $\nu^\pm$ von M gilt $w_A \nu^+ = \nu^-$. Wir betrachten deshalb im Sinne von Satz 7.4 die Darstellung $\nu_n = \nu^+ \oplus \nu^-$. Für alle $0 \leq l \leq 2n$ ist

$$\nu_l = \sum_{r=0}^{l} (-1)^{l-r} \sigma_r \restriction_M,$$

wobei σ_r dir r-te äußere Potenz der Standarddarstellung von K bezeichnet. Dies folgt sofort aus $\sigma_r \restriction_M = \nu_r \oplus \nu_{r-1}$. Wie oben konstruieren wir damit virtuelle Theta-Funktionen $H_l^\varphi(t)$ für alle $l \neq n$. Weil der Faktor $\mathrm{e}^{-t(n-l)^2}$ für $l = n$ in (7.10) verschwindet, können wir ebenfalls die virtuelle Theta-Funktion $H_n^\varphi(t)$ konstruieren.

Die regularisierte Determinante von $\Delta(w)$

Für alle $m_\sigma(w) \neq 0$ in (7.15) betrachten wir den verallgemeinerten Laplace-Operator

$$A_\sigma := \Delta_\sigma + (\tau(\Omega) - \sigma(\Omega_K))\,\mathrm{Id}\colon C^\infty(E^\sigma) \to C^\infty(E^\sigma)$$

in $L^2(E^\sigma)$. Wir definieren den verallgemeinerten Laplace-Operator $\Delta(w)$ bezüglich $w \in W^1$ in $L^2(E(w))$ durch

$$\Delta(w) := \sum_{m_\sigma(w)\neq 0} |m_\sigma(w)| A_\sigma. \tag{7.21}$$

Es sei

$$b_w := \min_{\sigma\in\widehat{K}} \min\{\lambda \mid \lambda \in \sigma(A_\sigma)\,\mathrm{mit}\, m_\sigma(w) \neq 0\} \tag{7.22}$$

die untere Schranke von $\Delta(w)$.
Wir gehen wie in Abschnitt A.1 vor. Es sei

$$\xi_w(s,p) := \int_0^\infty \mathrm{e}^{-tp}\, H(t;w) t^{s-1} \mathrm{d}t$$

die Xi-Funktion von $\Delta(w)$ und $\zeta_w(s,p) = \frac{1}{\Gamma(s)}\xi_w(s;p)$ seine verallgemeinerte Zeta-Funktion. Nach Korollar A.16 ist $\zeta_w(s,p)$ in $s = 0$ regulär für alle $p \in U(b_w)$ und es gilt

$$-\log \det\nolimits_{\mathrm{s}}(\Delta(w) + p) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\zeta_w(z,p)\Big|_{z=0} = \mathrm{Pf}_{z=0}\,\xi_w(z,p),$$

wobei $\det_{\mathrm{s}}(\Delta(w)+p)$ die graduierte regularisierte Determinante von $\Delta(w)+p\,\mathrm{Id}$ bezüglich der $\mathbb{Z}_2$-Graduierung bezeichnet. Mit $\mathrm{Pf}_{z=0}\,G(z)$ bezeichnen wir das konstante Glied der Laurent-Entwicklung einer meromorphen Funktion G um $z = 0$, siehe Abschnitt A.1 für die Einzelheiten.
Aus Definition (7.21) von $\Delta(w)$ können wir im Allgemeinen nicht folgern, dass $\Delta(w)$ einen nicht trivialen Kern hat. Es sei $N_w = \dim_{\mathrm{gr}} \ker(\Delta(w))$ die graduierte Dimension von $\ker(\Delta(w))$. Es sei

$$q = \sum_{w\in W^1} (-1)^{\ell(w)+1} N_w.$$

Wir zeigen jetzt, dass $q = 0$. Dazu bemerken wir, dass nach Konstruktion von $H(t;w)$:

$$\sum_{r=0}^{2n+1} (-1)^r r (\mathrm{Tr}\,\mathrm{e}^{-\Delta_r(\tau)} + \mathrm{Tr}\,\mathrm{e}^{-t\Delta_r(\tau_\theta)}) = \sum_{w\in W^1} (-1)^{\ell(w)+1}\,\mathrm{Tr_s}\,\mathrm{e}^{-t\Delta(w)}. \tag{7.23}$$

Weil $\Delta_r(\tau) = \Delta_r(\tau_\theta)$ strikt positiv, ist

$$\lim_{t\to\infty} \mathrm{Tr}\,\mathrm{e}^{-t\Delta_r(\tau)} = 0.$$

Aus (7.23) folgt dann

$$\sum_{w\in W^1} (-1)^{\ell(w)+1} \lim_{t\to\infty} \mathrm{Tr_s}\,\mathrm{e}^{-t\Delta(w)} = \sum_{w\in W^1} (-1)^{\ell(w)+1} (N_w + \lim_{t\to\infty} \mathrm{Tr_s}\,\mathrm{e}^{-t\Delta(w)'}) = 0,$$

wobei $\Delta(w)'$ die Einschränkung von $\Delta(w)$ auf das orthogonale Komplement von $\ker(\Delta(w))$ in $L^2(E(w))$ ist. Daraus erhalten wir sofort die Behauptung:

$$q = \sum_{w \in W^1} (-1)^{\ell(w)+1} N_w = 0. \tag{7.24}$$

Weil $\Delta_r(\tau) = \Delta_r(\tau_\theta)$, folgt für alle $p \in U(b_w)$

$$\prod_{r=0}^{2n+1} \det(\Delta_r(\tau) + p\,\mathrm{Id})^{2(-1)^r r} = \prod_{w \in W^1} \det{}_{\mathrm{s}}(\Delta(w) + p\,\mathrm{Id})^{(-1)^{\ell(w)+1}}.$$

Nach (A.21) ist dann

$$\lim_{p \to 0} \prod_{w \in W^1} \left(\det{}_{\mathrm{s}}(\Delta(w) + p\,\mathrm{Id}) \cdot p^{-N_w} \right)^{(-1)^{\ell(w)+1}} = \prod_{w \in W^1} \det{}_{\mathrm{s}}(\Delta(w)')^{(-1)^{\ell(w)+1}}. \tag{7.25}$$

Aus (7.24) folgt

$$\lim_{p \to 0} \prod_{w \in W^1} \left(\det{}_{\mathrm{s}}(\Delta(w) + p\,\mathrm{Id}) \cdot p^{-N_w} \right)^{(-1)^{\ell(w)+1}} = \prod_{r=0}^{2n+1} \det(\Delta_r(\tau))^{2(-1)^r r}.$$

Damit haben wir den folgenden Satz bewiesen.

Satz 7.5. *Es gilt*

$$T^{\mathrm{an}}(\tau)^4 = \prod_{w \in W^1} \det{}_{\mathrm{s}}(\Delta(w)')^{(-1)^{\ell(w)+1}}. \tag{7.26}$$

Bemerkung. Man vergleiche (7.26) mit der Aussage von Satz 7.3.

7.3 Die Spurformel von $H(t; w)$

Ziel dieses Abschnitts ist die geometrische Seite der Selbergschen Spurformel für die virtuelle Theta-Funktion bezüglich $w \in W^1$ zu bestimmen.
Aus Satz 3.10 folgt mit (7.18)

$$H(t; w) = \mathrm{Tr} R_\Gamma(k_t^w),$$

wobei k_t^w in (7.20) definiert ist.
Wir bestimmen die Fourier-Transformierte von k_t^w. Es sei $\pi_{\xi,\lambda} \in \widehat{G}$ eine unitäre induzierte Darstellung von G. Für alle $\sigma \in \widehat{K}$ ist

$$\widehat{k_t^\sigma}(\xi, \lambda) = \mathrm{e}^{-t(-\pi_{\xi,\lambda}(\Omega) + \tau(\Omega)\,\mathrm{Id})} \dim(H_{\xi,\lambda} \otimes V_\sigma)^K.$$

Die Wirkung des Casimir-Elements Ω von G auf $\pi_{\xi,\lambda}$ ist

$$\pi_{\xi,\lambda}(\Omega) = -\lambda^2 - \rho^2 + \|\Lambda_\xi + \rho_{\mathfrak{m}}\|^2 - \|\rho_{\mathfrak{m}}\|^2,$$

wobei Λ_ξ das höchste Gewicht von ξ ist. Nach Konstruktion erhalten wir wie in Abschnitt 5

$$\widehat{k_t^w}(\xi,\lambda) = \mathrm{e}^{-t(\lambda^2 - \|\Lambda_\xi+\rho_{\mathfrak{m}}\|^2 + \|\Lambda_\tau+\rho_{\mathfrak{g}}\|^2)}(\dim(W_\xi\otimes V_{\tau(w)})^M + \dim(W_\xi\otimes V_{\tau\theta(w)})^M).$$

Weil die M-Module $V_{\tau(w)}$ und $V^\theta_{\tau(w)}$ irreduzibel sind, erhalten wir weiter

$$\sum_{\xi\in\widehat{M}} \widehat{k_r^w}(\xi,\lambda) = \widehat{k_t^w}(\nu_\tau(w),\lambda) + \widehat{k_t^w}(\nu_{\tau_\theta}(w),\lambda).$$

Aus (5.12) und (7.13) folgt

$$\widehat{k_t^w}(\nu_\tau(w),\lambda) = \widehat{k_t^w}(\nu_{\tau_\theta}(w),\lambda) = \mathrm{e}^{-t(\lambda^2+\lambda_\tau(w)^2)}.$$

Nach der Spurformel (3.9) erhalten wir unter Ausnutzung dieser Resultate

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}R_\Gamma(k_t^w) = \mathrm{Vol}(X)k_t^w(e) + \frac{1}{2\pi}\sum_{\{\gamma\}\neq\{e\}} \ell(\gamma_0)\frac{\mathrm{tr}\,\nu_\tau(w)(m_\gamma) + \mathrm{tr}\,\nu_{\tau_\theta}(w)(m_\gamma)}{\det(\mathrm{Id}-\mathrm{Ad}(m_\gamma a_\gamma)_{\overline{\mathfrak{n}}})}\,\mathrm{e}^{-\rho\ell(\gamma)}\\ \cdot\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-t(\lambda^2+\lambda_\tau(w)^2)}\cdot \mathrm{e}^{i\ell(\gamma)\lambda}\,\mathrm{d}\lambda.\end{aligned}$$

Eine Wiederholung der Argumentation aus Abschnitt 5 liefert dann

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}R_\Gamma(k_t^w) = \mathrm{e}^{-t\lambda_w^2}\,\mathrm{Vol}(X)\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-t\lambda^2}\,P(i\lambda;w)\mathrm{d}\lambda\\ + \mathrm{e}^{-t\lambda_w^2}\sum_{\{\gamma\}\neq\{e\}}\ell(\gamma_0)L(\gamma;w)\frac{\mathrm{e}^{-t\ell(\gamma)^2/4t}}{(4\pi t)^{1/2}},\end{aligned}$$

wobei $L(\gamma;w) := L(\gamma;\nu_\tau(w)) + L(\gamma;\nu_{\tau_\theta}(w))$, also

$$L(\gamma;w) = \frac{\mathrm{tr}\,\nu_\tau(w)(m_\gamma) + \mathrm{tr}\,\nu_{\tau_\theta}(w)(m_\gamma)}{\det(\mathrm{Id}-\mathrm{Ad}(m_\gamma a_\gamma)_{\overline{\mathfrak{n}}})}\,\mathrm{e}^{-\rho\ell(\gamma)},$$

und entsprechend das Plancherel-Polynom $P(i\lambda;w) := P(i\lambda;\nu_\tau(w)) + P(i\lambda;\nu_{\tau_\theta}(w))$. Damit haben wir den folgenden Satz bewiesen.

Satz 7.6. *Für alle $w\in W^1$ gilt:*

$$H(t;w) = I(t;w) + G(t;w), \tag{7.27}$$

wobei

$$\begin{aligned}I(t;w) &:= \mathrm{e}^{-t\lambda_\tau(w)^2}\,\mathrm{Vol}(X)\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-t\lambda^2}\,P(i\lambda;w)\mathrm{d}\lambda,\\ G(t;w) &:= \mathrm{e}^{-t\lambda_\tau(w)^2}\sum_{\{\gamma\}\neq\{e\}}\ell(\gamma_0)L(\gamma;w)\frac{\mathrm{e}^{-\ell(\gamma)^2/4t}}{(4\pi t)^{1/2}}.\end{aligned}\tag{7.28}$$

Wir zeigen, dass das asymptotische Verhalten von $H(t;w)$ für $t \to 0^+$ durch $I(t;w)$ bestimmt ist. Für die Theta-Funktion von Δ_σ ist dieses Ergebnis wohlbekannt, siehe Theorem 5.1 in [Mia80]. Für die virtuelle Theta-Funktion folgt aus Lemma 3.9 das folgende Lemma.

Lemma 7.7. *Für* $0 < t \le T$ *existiert eine Konstante* $c > 0$, *so dass*

$$\sum_{\gamma \neq e} |k_t^w(x^{-1}\gamma x)| = O(\mathrm{e}^{-c/t}).$$

Daraus erhalten wir dann

Satz 7.8. *Es gilt*

$$H(t;w) \sim I(t;w), \qquad t \to 0^+.$$

Beweis. Aus der Spurformel (7.27) von $H(t;w)$ folgt mit obigem Lemma

$$\begin{aligned}\Big|H(t;w) - I(t;w)\Big| &\le \sum_{\gamma \neq e} \int_{\Gamma\backslash G} |k_t^w(g^{-1}\gamma g)| \mathrm{d}\dot{g} \\ &\le C \frac{\mathrm{e}^{-c_0^2/4t}}{t^{n+1/2}} \sum_{\gamma \neq e} \int_{\Gamma\backslash G} \exp\Big(-\frac{d(gK, \gamma gK)^2 - c_0^2}{4t}\Big) \mathrm{d}\dot{g} \\ &\le C\,\mathrm{e}^{-c/t}, \quad c > 0\end{aligned}$$

wobei c_0 wie in (3.23). □

8 Die Ruellesche Zetafunktion $R^\tau(z)$ in $z = 0$

Oben haben wir gezeigt, dass die Ruellesche Zetafunktion $R^\tau(z)$, $\mathrm{Re}(z) > 2\rho + c_\tau$ folgende Produktdarstellung besitzt

$$R^\tau(z) = \prod_{w \in W^1} S(z + \lambda_\tau(w); w)^{(-1)^{\ell(w)+1}}.$$

In diesem Abschnitt zeigen wir, dass $R^\tau(z)$ eine meromorphe Fortsetzung auf $\mathbb{C}$ hat und im Ursprung regulär ist mit

$$R^\tau(0) = T^{\mathrm{an}}(\tau)^4.$$

Zum Beweis benutzen wir die von Moscovici/Stanton [MS91] entwickelte Methode, die auf der Herleitung einer Determinantenformel für Selbergsche Zetafunktionen basiert.

8.1 Determinantenformel von $S(z;w)$

In diesem Abschnitt zeigen wir das die regularisierte Determinante von $\Delta(w)$ im Wesentlichen durch die Selbergsche Zetafunktionen $S(z;w)$ beschrieben wird.
Wir zeigen zuerst, dass $I(t;w)$ eine zulässige Funktion im Sinne der Laplace-Mellin-Transformation ist. Weil $\lambda_\tau(w) \neq 0$ für alle $w \in W^1$ ist, folgt aus (7.28), dass ein $c > 0$ existiert, so dass $I(t;w) = O(\mathrm{e}^{-ct})$ für $t \to \infty$. Das asymptotische Verhalten von $I(t;w)$ für $t \to 0^+$ wird im folgenden Satz beschrieben.

Satz 8.1. *Für $t > 0$ gilt*
$$I(t;w) = \sum_{k=-n-1}^{\infty} c_k^w t^{-\alpha_k}, \tag{8.1}$$
wobei $\alpha_k = k + 1/2$ und
$$c_k^w = \operatorname{Vol}(X) \sum_{i-j=k+1} (-1)^{i+j} a_j(w) \Gamma(\alpha_j) \frac{\lambda_\tau(w)^{2i}}{i!}.$$

Beweis. Weil das Plancherel-Polynom $P(i\lambda; w)$ von der folgenden Form ist
$$P(i\lambda;w) = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j a_j(w) \lambda^{2j}, \tag{8.2}$$
folgt aus (7.28)
$$I(t;w) = \operatorname{Vol}(X)\, \mathrm{e}^{-t\lambda_\tau(w)^2} \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \Gamma(j+1/2) \frac{a_j(w)}{t^{j+1/2}}. \tag{8.3}$$
Wir setzen in (8.3) die Potenzreihe von $\mathrm{e}^{-t\lambda_\tau(w)^2}$ um $t = 0$ ein. Dann ist
$$\begin{aligned} I(t;w) &= \operatorname{Vol}(X) \Big(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i t^i}{i!} \lambda_\tau(w)^{2i} \Big) \cdot \Big(\sum_{j=0}^{n} (-1)^j a_j(w) \frac{\Gamma(j+\frac{1}{2})}{t^{j+1/2}} \Big) \\ &= \sum_{k=-n-1}^{\infty} c_k^w t^{-\alpha_k}, \end{aligned}$$
wobei $\alpha_k \coloneqq k + 1/2$ und
$$c_k^w = \operatorname{Vol}(X) \sum_{i-j=k+1} (-1)^{i+j} a_j(w) \Gamma(\alpha_j) \frac{\lambda_\tau(w)^{2i}}{i!}, \tag{8.4}$$
mit $i \geq 0$ und $0 \leq j \leq n$. □

Damit sind $H(t;w)$ und $I(t;w)$ zulässige Funktion im Sinne der Laplace-Mellin-Transformation. Aus Satz 7.8 und der Spurformel von $H(t;w)$ folgt
$$\begin{aligned} \operatorname{Pf}_{s=1} \int_0^\infty \mathrm{e}^{-tp}\, H(t;w) t^{s-1} \mathrm{d}t = \operatorname{Pf}_{s=1} &\int_0^\infty \mathrm{e}^{-tp}\, I(t;w) t^{s-1} \mathrm{d}t \\ &+ \operatorname{Pf}_{s=1} \int_0^\infty \mathrm{e}^{-tp}\, G(t;w) t^{s-1} \mathrm{d}t. \end{aligned} \tag{8.5}$$
Wir bestimmen den ersten Summanden auf der rechten Seite dieser Relation.

Lemma 8.2. *Es sei $z \in \mathbb{C}$, so dass $\operatorname{Re}(z^2) > 0$. Für alle $j \in \mathbb{N}_0$ gilt*
$$\operatorname{Pf}_{s=1} \int_0^\infty \mathrm{e}^{-tz^2} \Big(\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-t\lambda^2} \lambda^{2j} \mathrm{d}\lambda \Big) t^{s-1} \mathrm{d}t = (-1)^j \pi z^{2j-1}.$$

Beweis. Aus
$$\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-t\lambda^2}\,\lambda^{2j}\mathrm{d}\lambda = \frac{\Gamma(j+1/2)}{t^{j+1/2}}$$
folgt
$$\begin{aligned}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-tz^2}\left(\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-t\lambda^2}\,\lambda^{2j}\mathrm{d}\lambda\right)t^{s-1}\mathrm{d}t &= \Gamma(j+1/2)\int_0^\infty \mathrm{e}^{-tz^2}\,t^{s-j-3/2}\mathrm{d}t\\ &= \Gamma(j+1/2)\Gamma(-j-1/2+s)z^{2j-2s+1}.\end{aligned}$$
Aus
$$\Gamma(1-z)\Gamma(z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}$$
und $\Gamma(z+1) = z\,\Gamma(z)$ folgt dann für $s = 1$ die Aussage. □

Also ist für $\mathrm{Re}(z^2) > 0$
$$\mathrm{Pf}_{s=1}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-tz^2}\left(\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-t\lambda^2}\,P(i\lambda;w)\mathrm{d}\lambda\right)t^{s-1}\mathrm{d}t = \frac{\pi}{z}P(z;w). \tag{8.6}$$
Wir fassen dieses Ergebnis zu folgendem Satz zusammen.

Satz 8.3. *Für alle* $z \in \mathbb{C}$ *mit* $\mathrm{Re}(z^2) > 0$ *gilt*
$$z\,\mathrm{Pf}_{s=1}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-t(z^2-\lambda_\tau(w)^2)}\,I(t;w)\,t^{s-1}\mathrm{d}t = \pi\,\mathrm{Vol}(X)P(z;w). \tag{8.7}$$
Jetzt soll der zweite Summand auf der rechten Seite von (8.5) bestimmt werden.

Satz 8.4. *Es sei* $\mathrm{Re}(z^2 + 2z\lambda_\tau(w)) > -b_w$. *Dann ist*
$$\begin{aligned}(2z+2\lambda_\tau(w))\,\mathrm{Pf}_{s=1}&\int_0^\infty \mathrm{e}^{-tz(z+2\lambda_\tau(w))}(H(t;w)-I(t;w))\,t^{s-1}\mathrm{d}t\\ &= \sum_{\{\gamma\}\neq\{e\}} \ell(\gamma_0)L(\gamma;w)\,\mathrm{e}^{-(z+\lambda_\tau(w))\ell(\gamma)}\,.\end{aligned} \tag{8.8}$$
Die ursprüngliche Beweisidee geht auf Moscovici/Stanton [MS89] zurück. Man zerlegt die ganze Funktion auf der linken Seite von (8.8) bezüglich der Integration in zwei Summanden. Aus der Spurformel folgt unter Ausnutzung folgender Relation
$$\mathrm{e}^{-wl} = 2w\int_0^\infty \mathrm{e}^{-tw^2}\,\frac{\mathrm{e}^{-l^2/4t}}{(4\pi t)^{1/2}}\mathrm{d}t \tag{8.9}$$
für $\mathrm{Re}(w) > 0$ dann die Aussage. Zum Beweis von (8.9) bestimmen wir die Mellin-Transformierte beider Seiten dieser Relation. Für die linke Seite erhält man sofort für $\mathrm{Re}(w) > 0$
$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-wl}\,l^{s-1}\mathrm{d}l = \Gamma(s)w^{-s}.$$

Für die rechte Seite von (8.9) erhält man

$$2w\int_0^\infty e^{-tw^2}\Big(\int_0^\infty \frac{e^{-l^2/4t}}{(4\pi t)^{1/2}} l^{s-1}dl\Big)dt = \pi^{-1/2}2^{s-1}\Gamma\Big(\frac{s}{2}\Big)\cdot w\int_0^\infty e^{-tw^2}\,t^{(s-1)/2}dt$$
$$= \pi^{-1/2}2^{s-1}\Gamma\Big(\frac{s}{2}\Big)\cdot\Gamma\Big(\frac{s+1}{2}\Big)w^{-s}.$$

Aus der Legendre-Identität:

$$\pi^{1/2}\Gamma(2s) = 2^{2s-1}\Gamma(s)\Gamma\Big(s+\frac{1}{2}\Big)$$

folgt sofort die Aussage.

Beweis von Satz 8.4. Aus Satz 7.6 folgt

$$(2z+2\lambda_\tau(w))\,\mathrm{Pf}_{s=1}\int_0^\infty e^{-tz(z+2\lambda_\tau(w))}\,H(t;w)\,t^{s-1}dt$$
$$= (2z+2\lambda_\tau(w))\,\mathrm{Pf}_{s=1}\int_0^\infty e^{-tz(z+2\lambda_\tau(w))}\,G(t;w)\,t^{s-1}dt$$
$$+ (2z+2\lambda_\tau(w))\,\mathrm{Pf}_{s=1}\int_0^\infty e^{-tz(z+2\lambda_\tau(w))}\,I(t;w)\,t^{s-1}dt.$$

Es sei $T > 0$. Wir zerlegen

$$(2z+2\lambda_\tau(w))\,\mathrm{Pf}_{s=1}\int_0^\infty e^{-tz(z+2\lambda_\tau(w))}\,H(t;w)\,t^{s-1}dt$$

in zwei Summanden:

$$J_T := (2z+2\lambda_\tau(w))\,\mathrm{Pf}_{s=1}\int_0^T e^{-tz(z+2\lambda_\tau(w))}\,H(t;w)\,t^{s-1}dt$$

und

$$J_\infty := (2z+2\lambda_\tau(w))\,\mathrm{Pf}_{s=1}\int_T^\infty e^{-tz(z+2\lambda_\tau(w))}\,H(t;w)\,t^{s-1}dt.$$

Wir bemerken zunächst, dass $\Delta(w)$ ein verallgemeinerter Laplace-Operator im Sinne von Abschnitt A ist. Dann ist J_T eine holomorphe Funktion in z. Als eine Funktion von z hat J_∞ eine meromorphe Fortsetzung auf $\mathbb{C}$.
Aus (A.7) folgt, dass

$$(\Delta(w)+z(z+2\lambda_\tau(w))\,\mathrm{Id})^{-1}\colon L^2(E(w)) \to L^2(E(w))$$

für $\mathrm{Re}(z^2+2z\lambda_\tau(w)) > -b_w$ ein beschränkter Operator ist. Aus der elliptischen Regularitätstheorie erhalten wir eine stetige, lineare Fortsetzung zu einem Operator

$$(\Delta(w)+z(z+2\lambda_\tau(w))\,\mathrm{Id})^{-1}\colon H^k(E(w)) \to H^{k+2}(E(w)),$$

für $\mathrm{Re}(z^2) > -b_w + \lambda_\tau(w)^2$, wobei $H^k(E(w))$ und $H^{k+2}(E(w))$ jeweiligen Sobolevräume sind. Nach dem Lemma von Rellich ist $(\Delta(w)+(z^2-\lambda_\tau(w)^2)\,\mathrm{Id})^{-1}$ ein kompakter Operator. Damit ist J_∞ für $\mathrm{Re}(z^2+2z\lambda_\tau(w)) > -b_w$ ein Operator der Spurklasse. Es gilt

$$J_\infty = (2z+2\lambda_\tau(w))\,\mathrm{Tr_s}\left((\Delta(w)+z(z+2\lambda_\tau(w))\,\mathrm{Id})^{-1}\,\mathrm{e}^{-T(\Delta(w)+z(z+2\lambda_\tau(w)))}\right).$$

Wir wollen die Spurformel auf J_∞ anwenden. Dazu müssen wir zeigen, dass der Kern dieses Operators in $C^1(G)$ liegt. Es sei $\widetilde{\Delta}(w)$ der verallgemeinerte Laplace-Operator auf $C^\infty(\widetilde{E}(w))$. Wir schreiben den Operator

$$(\widetilde{\Delta}(w)+z(z+2\lambda_\tau(w))\,\mathrm{Id})^{-1}\,\mathrm{e}^{-T(\widetilde{\Delta}(w)+z(z+2\lambda_\tau(w)))} \tag{8.10}$$

unter Ausnutzung der Halbgruppeneigenschaft des Wärmeleitungsoperators von $\widetilde{\Delta}(w)$ in folgender Form

$$\left((\widetilde{\Delta}(w)+z(z-2z\lambda_\tau(w)^2)\,\mathrm{Id})^{-1}\,\mathrm{e}^{-\varepsilon(\widetilde{\Delta}(w)+z(z-2z\lambda_\tau(w)^2)}\right)\mathrm{e}^{-(T-\varepsilon)(\widetilde{\Delta}(w)+z(z-2z\lambda_\tau(w)^2)},$$

für ein $0<\varepsilon<T$. Der erste Faktor im obigen Ausdruck ist ein Glättungsoperator. Sein Kern liegt im Harish-Chandra's L^1-Schwartz-Raum von G, siehe Bemerkung 3.11. Der zweite Faktor ist ein Wärmeleitungsoperator auf den wir die Theorie aus Abschnitt 3.2 anwenden. Die Faltung der Kerne dieser Operatoren ist wieder ein Element in $(C^1(G)\otimes \mathrm{End}(V(w)))^{K\times K}$. Damit können wir die Spurformel auf J_∞ anwenden, siehe Bemerkung 3.8. Wir bemerken zunächst, dass nach Konstruktion in Abschnitt 7.2 der Operator $\widetilde{\Delta}(w)+z(z+2\lambda_\tau(w))\,\mathrm{Id}$ mit

$$-R(\Omega)+\tau(\Omega)\,\mathrm{Id}+z(z+2\lambda_\tau(w))\,\mathrm{Id}$$

auf $(C^\infty(G)\otimes V(w))^K$ identifiziert wird. Es sei $\pi_{\xi,\lambda}$ eine unitäre irreduzible Darstellung von G. Aus (5.12) folgt

$$\lambda^2+(z+\lambda_\tau(w))^2-\|\Lambda_\xi+\rho_{\mathfrak{m}}\|^2+\|w(\Lambda_\tau+\rho_{\mathfrak{g}})\restriction_{\mathfrak{t}}\|^2.$$

Für die Fourier-Transformierte von k_t^w gilt

$$\widehat{k_t^w}(\xi;\lambda) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-t(\lambda^2+\lambda_\tau(w)^2)}, & \text{für } \xi\cong\nu_\tau(w),\ \xi\cong\nu_{\tau_\theta}(w);\\ 0, & \text{sonst,}\end{cases}$$

siehe Abschnitt 7.3. Daraus folgt, dass die Fourier-Transformierte der lokalen Spur des Kern von (8.10) nur für $\nu_\tau(w)$ und $\nu_{\tau_\theta}(w)$ nicht verschwindet. Aus (3.9) folgt damit

$$\begin{aligned} J_\infty = \sum_{\{\gamma\}\neq\{e\}} \ell(\gamma_0)L(\gamma;w)\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \frac{2z+2\lambda_\tau(w)}{(z+\lambda_\tau(w))^2+\lambda^2}\,\mathrm{e}^{-T((z+\lambda_\tau(w))^2+\lambda^2)}\,\mathrm{e}^{i\lambda\ell(\gamma)}\,\mathrm{d}\lambda \\ +(2z+2\lambda_\tau(w))\int_T^\infty \mathrm{e}^{-tz(z+2\lambda_\tau(w))}\,I(t;w)\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Wir formulieren dieses Ergebnis wie folgt um. Aus

$$\frac{\mathrm{e}^{-T((z+\lambda_\tau(w))^2+\lambda^2)}}{(z+\lambda_\tau(w))^2+\lambda^2} = \int_T^\infty \mathrm{e}^{-t((z+\lambda_\tau(w))^2+\lambda^2)}\,\mathrm{d}t$$

folgt mit (5.13)

$$
\begin{aligned}
J_\infty = \sum_{\{\gamma\}\neq\{e\}} \ell(\gamma_0)L(\gamma;w)(2z+2\lambda_\tau(w)) \int_T^\infty \mathrm{e}^{-t(z+\lambda_\tau(w))^2} \frac{\mathrm{e}^{-\ell(\gamma)^2/4t}}{(4\pi t)^{1/2}} \mathrm{d}t \\
+ (2z+2\lambda_\tau(w)) \int_T^\infty \mathrm{e}^{-tz(z+2\lambda_\tau(w))} I(t;w)\mathrm{d}t.
\end{aligned}
\tag{8.11}
$$

Nach Lemma 7.7 ist $G(t;w)$ für $0 < t \leq T$ eine gleichmäßig konvergente Reihe. Nach dem Satz von Lebesgue können wir also die Grenzwerte in J_T vertauschen. Das heißt

$$
\begin{aligned}
J_T = \sum_{\{\gamma\}\neq\{e\}} \ell(\gamma_0)L(\gamma;w)(2z+2\lambda_\tau(w)) \operatorname{Pf}_{s=1} \int_0^T \mathrm{e}^{-t(z+\lambda_\tau(w))^2} \frac{\mathrm{e}^{-\ell(\gamma)^2/4t}}{(4\pi t)^{1/2}} t^{s-1}\mathrm{d}t \\
+ (2z+2\lambda_\tau(w)) \operatorname{Pf}_{s=1} \int_0^T \mathrm{e}^{-tz(z+2\lambda_\tau(w))} I(t;w)t^{s-1}\mathrm{d}t.
\end{aligned}
$$

Daraus folgt

$$
\begin{aligned}
J_T = \sum_{\{\gamma\}\neq\{e\}} \ell(\gamma_0)L(\gamma;w)(2z+2\lambda_\tau(w)) \int_0^T \mathrm{e}^{-t(z+\lambda_\tau(w))^2} \frac{\mathrm{e}^{-\ell(\gamma)^2/4t}}{(4\pi t)^{1/2}} \mathrm{d}t \\
+ (2z+2\lambda_\tau(w)) \operatorname{Pf}_{s=1} \int_0^T \mathrm{e}^{-tz(z+2\lambda_\tau(w))} I(t;w)t^{s-1}\mathrm{d}t.
\end{aligned}
\tag{8.12}
$$

Aus (8.11) und (8.12) folgt

$$
\begin{aligned}
(2z+2\lambda_\tau(w)) \operatorname{Pf}_{s=1} \int_0^\infty \mathrm{e}^{-tz(z+2\lambda_\tau(w))} H(t;w)\, t^{s-1}\mathrm{d}t = \\
= \sum_{\{\gamma\}\neq\{e\}} \ell(\gamma_0)L(\gamma;w)(2z+2\lambda_\tau(w)) \int_0^\infty \mathrm{e}^{-t(z+\lambda_\tau(w))^2} \frac{\mathrm{e}^{-\ell(\gamma)^2/4t}}{(4\pi t)^{1/2}} \mathrm{d}t \\
+ (2z+2\lambda_\tau(w)) \operatorname{Pf}_{s=1} \int_0^\infty \mathrm{e}^{-tz(z+2\lambda_\tau(w))} I(t;w)t^{s-1}\mathrm{d}t.
\end{aligned}
$$

Aus (8.9) erhalten wir schließlich die Aussage. □

Wir bemerken, dass die linke Seite von (8.8) die logarithmische Ableitung $Y(z+\lambda_\tau(w);w)$ von $S(z+\lambda_\tau(w);w)$ ist.
Mit Hilfe von Satz 8.4 können wir die Menge der Null- und Pol-Stellen von $Y(z+\lambda_\tau(w);w)$ beschreiben. Es sei

$$
\sigma(\Delta(w)): \qquad -\infty < b_w \leq \mu_1^w \leq \mu_2^w \leq \cdots \to \infty
$$

das Spektrum von $\Delta(w)$, wobei μ_j^w mit der Multiplizität $N_w(\mu_j^w)$ auftritt. Eine triviale Verallgemeinerung von (A.17) ergibt eine meromorphe Fortsetzung $\operatorname{Pf}_{s=1}\xi_w(s;p)$, $\operatorname{Re}(p) > -b_w$ auf $\mathbb{C}$ mit Pol-Stellen in $-\mu_j^w$ und Residuum $N_w(\mu_j^w)$. Daraus erhalten wir dann den folgenden Satz.

Satz 8.5. *Die logarithmische Ableitung $Y(z;w)$ von $S(z;w)$ hat eine meromorphe Fortsetzung auf $\mathbb{C}$. Die Menge der Singularitäten von $Y(z;w)$ ist*

$$\left\{z_j = \pm(-\mu_j^w + \lambda_\tau(w)^2)^{1/2} \mid \mu_j^w \in \sigma(\Delta(w))\right\},$$

wobei

$$(-\mu_j^w + \lambda_\tau(w)^2)^{1/2} = \begin{cases} \sqrt{-\mu_j^w + \lambda_\tau(w)^2}, & \text{für } \mu_j^w \leq \lambda_\tau(w)^2; \\ i\sqrt{\mu_j^w - \lambda_\tau(w)^2}, & \text{für } \mu_j^w > \lambda_\tau(w)^2. \end{cases}$$

Das Residuum von $Y(z;w)$ an der Stelle $z = z_j$ für $\mu_j^w \neq -\lambda_\tau(w)^2$ ist $N_w(\mu_j^w)$.
Wenn $\lambda_\tau(w)^2 \in \sigma(\Delta(w))$, dann ist das Residuum von $Y(z;w)$ an der Stelle $z = 0$

$$2N_w = 2\dim_{\mathrm{gr}}\ker(\Delta(w)).$$

Beweis. Aus Satz 8.4 folgt unter der Variablentransformation $z \rightsquigarrow z - \lambda_\tau(w)$

$$Y(z;w) = 2z\,\mathrm{Pf}_{s=1}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-t(z^2-\lambda_\tau(w)^2)}(H(t;w) - I(t;w))\,t^{s-1}\mathrm{d}t$$

für $\mathrm{Re}(z^2) > -b_w + \lambda_\tau(w)^2$. Aus Satz 8.3 erhalten wir dann

$$Y(z;w) = 2z\,\mathrm{Pf}_{s=1}\,\xi_w(s; z^2 - \lambda_\tau(w)^2) - 2\pi\,\mathrm{Vol}(X)P(z;w). \tag{8.13}$$

Aussage folgt sofort aus den vorherigen Überlegungen. □

Korollar 8.6. *Die logarithmische Ableitung $Y(z;w)$ von $S(z;w)$ genügt folgender Funktionalgleichung*

$$Y(z;w) + Y(-z;w) = -4\pi\,\mathrm{Vol}(X)P(z;w). \tag{8.14}$$

Beweis. Nach (8.13) ist

$$\begin{aligned} Y(z;w) &= 2z\,\mathrm{Pf}_{s=1}\,\xi_w(s, z^2 - \lambda_\tau(w)^2) - 2\pi\,\mathrm{Vol}(X)P(z;w), \\ Y(-z;w) &= -2z\,\mathrm{Pf}_{s=1}\,\xi_w(s, z^2 - \lambda_\tau(w)^2) - 2\pi\,\mathrm{Vol}(X)P(-z;w). \end{aligned}$$

Aus $P(z;w) = \sum_{j=0}^n a_j^w z^{2j}$ folgt $P(-z;w) = P(z;w)$ und damit die Aussage. □

Wir bemerken, dass $Y(z;w)$ exponentiell konvergiert für $z \to \infty$. Den Logarithmus von $S(z;w)$ erhalten wir aus $Y(z;w)$ durch

$$\log S(z;w) = -\int_z^\infty Y(s;w)\mathrm{d}s.$$

Weil die logarithmische Ableitung $Y(z;w)$ von $S(z;w)$ Singularitäten besitzt, ist das obige Integral apriori nicht unabhängig von der Wahl des Intergrationsweges. Nach Satz 8.5 ist das Residuum jeder Singularität z_j von $Y(z;w)$ eine ganze Zahl. Damit ist das obige Integral wohldefiniert. Aus Satz 8.5 folgt unmittelbar das folgende Theorem.

Theorem 8.7. *Die Selbergsche Zetafunktion $S(z;w)$ hat eine meromorphe Fortsetzung auf $\mathbb{C}$. Die Menge der Singularitäten ist*

$$\left\{z_j = \pm(-\mu_j^w + \lambda_\tau(w)^2)^{1/2} \mid \mu_j^w \in \sigma(\Delta(w))\right\}.$$

Die Ordnung von $S(z;w)$ an der Stelle $z = z_j$ für $\mu_j^w \neq -\lambda_\tau(w)^2$ ist $N_w(\mu_j^w)$.
Wenn $\lambda_\tau(w)^2 \in \sigma(\Delta(w))$, dann ist die Ordnung von $S(z;w)$ an der Stelle $z = 0$

$$2N_w = 2\dim_{\mathrm{gr}}\ker(\Delta(w)).$$

Satz 8.8. *Die Selbergsche Zetafunktion $S(z;w)$ genügt folgender Funktionalgleichung*

$$\frac{S(z;w)}{S(-z;w)} = \exp\Big(-4\pi\,\mathrm{Vol}(X)\int_0^z P(\lambda;w)\mathrm{d}\lambda\Big). \tag{8.15}$$

Beweis. Weil $P(z;w)$ ein Polynom ist, hängt die rechte Seite von (8.15) nicht vom Integrationsweg ab. Die Aussage folgt sofort aus Funktionalgleichung (8.14) von $Y(z;w)$. □

Aus (A.16) folgt für $p \in U(b_w)$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\,\mathrm{Pf}_{s=0}\,\xi_w(s;p) = -\,\mathrm{Pf}_{s=1}\,\xi_w(s;p).$$

Unter der Variablentransformation $p \rightsquigarrow z^2 - \lambda_\tau(w)^2$ erhalten wir daraus folgende Identität

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\,\mathrm{Pf}_{s=0}\,\xi_w(s;z^2-\lambda_\tau(w)^2) = -2z\,\mathrm{Pf}_{s=1}\,\xi_w(s;z^2-\lambda_\tau(w)^2).$$

Nach (A.18) ist

$$\log\det{}_{\mathrm{s}}(\Delta(w) - \lambda_\tau(w)^2 + z^2) = -\,\mathrm{Pf}_{s=0}\,\xi_w(s;z^2-\lambda_\tau(w)^2).$$

Aus (8.7) folgt damit

$$S(z;w) = \det{}_{\mathrm{s}}(\Delta(w) - \lambda_\tau(w)^2 + z^2)\exp\Big(-2\pi\,\mathrm{Vol}(X)\int_0^z P(\lambda;w)\mathrm{d}\lambda + C(w)\Big),$$

wobei $C(w)$ eine Konstante ist, die wir jetzt bestimmen werden.
Das asymptotische Verhalten von $\det_{\mathrm{s}}(\Delta(w) + p\,\mathrm{Id})$ für $p \to \infty$ wird durch die asymptotische Entwicklung von $H(t;w)$ für $t \to 0^+$ bestimmt, siehe (A.19). Nach Satz 7.8 ist das asymptotische Verhalten von $H(t;w)$ für $t \to 0^+$ aber identisch mit dem asymptotischen Verhalten von $I(t;w)$ für $t \to 0^+$. Daraus folgt, dass das asymptotische Verhalten von $\det_{\mathrm{s}}(\Delta(w) - \lambda_\tau(w)^2 + z^2)$ für $z \to \infty$ bis auf eine Konstante mit dem asymptotischen Verhalten von

$$\exp\Big(2\pi\,\mathrm{Vol}(X)\int_0^z P(\lambda;w)\mathrm{d}\lambda\Big), \quad z \to \infty$$

übereinstimmt. Aus der Definition der Selbergschen Zetafunktion folgt

$$\lim_{z\to\infty} S(z;w) = 1.$$

Damit ist $C(w) = 0$ und wir erhalten das folgende Theorem.

Theorem 8.9. *Für die Selbergsche Zetafunktion $S(z;w)$ gilt*

$$S(z;w) = \det_s(\Delta(w) - \lambda_\tau(w)^2 + z^2)\exp\Big(- 2\pi \operatorname{Vol}(X) \int_0^z P(\lambda; w)\mathrm{d}\lambda\Big). \tag{8.16}$$

Wir bemerken, dass der oben geführte Beweis der meromorphen Fortsetzbarkeit von $S(z;w)$ unabhängig von dem in [BO95] ist. Bunke/Olbrich benutzen die Spur einer gewissen Potenz der Resolvente eines a priori definierten elliptischen Differentialoperators.

8.2 Determinantenformel von $R^\tau(z)$

Die Ergebnisse des vorherigen Abschnitts benutzen wir, um die Ruellesche Zetafunktion $R^\tau(z)$ auf $\mathbb{C}$ meromorph fortzusetzen, eine Funktionalgleichung herzuleiten und mit Hilfe einer Determinantenformel die singulären Stellen explizit zu beschreiben. Hierfür benutzen wir die Produktdarstellung (6.2):

$$R^\tau(z) = \prod_{w \in W^1} S(z + \lambda_\tau(w); w)^{(-1)^{\ell(w)+1}}.$$

Aus Theorem 8.7 folgt damit das folgende Theorem.

Theorem 8.10. *Die Ruellesche Zetafunktion $R^\tau(z)$ hat eine meromorphe Fortsetzung auf $\mathbb{C}$.*

Aus der Funktionalgleichung (8.15) von $S(z;w)$ erhalten wir zunächst

$$\frac{R^\tau(z)}{R^\tau(-z)} = \exp\Big(- 4\pi \operatorname{Vol}(X) \sum_{w \in W^1} (-1)^{\ell(w)+1} \int_0^{z+\lambda_\tau(w)} P(\lambda; w)\mathrm{d}\lambda\Big). \tag{8.17}$$

Es sei

$$F(\lambda) := \sum_{w \in W^1} (-1)^{\ell(w)+1} P(\lambda + \lambda_\tau(w); w).$$

Dann ist

$$\frac{R^\tau(z)}{R^\tau(-z)} = \exp\Big(- 4\pi \operatorname{Vol}(X) \int_0^z F(\lambda)\mathrm{d}\lambda\Big).$$

Lemma 8.11. *Die Funktion $F(\lambda)$ ist konstant mit*

$$F(\lambda) = (2n+2)2\dim(V_\tau),$$

wobei $\dim(X) = 2n + 1$.

Beweis. Siehe Lemma 15 in [Brö98]. □

Bemerkung. Wir benötigen dieses Ergebnis, um eine geschlossene Form für die Funktionalgleichung und die Determinantenformel von $R^\tau(z)$ anzugeben, siehe dazu Theorem 8.12 1) & 2) unten. Zum Beweis von Theorem 8.13–dem Hauptergebnis dieser Arbeit– reicht jedoch schon die folgende Aussage:

$$p(z) = \int_0^z F(\lambda)\mathrm{d}\lambda$$

ist ein ungerades Polynom vom Grad $2n+1$ mit $p(0)=0$.
Zum Beweis dieser Aussage benutzen wir, dass das Plancherel-Polynom $P(\lambda;w)$ von der Form $\sum_{k=0}^{n} a_k^w \lambda^{2k}$ ist. In der Tat folgt damit sofort

$$p(z) = \int_{-z}^{z} \sum_{w\in W_1} (-1)^{\ell(w)+1} P(\lambda+\lambda_\tau(w);w)\mathrm{d}\lambda,$$

wobei $W_1 = \{w_1,\ldots,w_{n-1},w^+\} \subset W^1$ ist. Daraus erhalten wir $p(0)=0$. □

Es sei

$$C_X := \mathrm{Vol}(X)(\dim X + 1). \tag{8.18}$$

Aus Lemma 8.11 erhalten wir das folgende Theorem.

Theorem 8.12. *1) Die Ruellesche Zetafunktion $R^\tau(z)$ genügt folgender Funktionalgleichung*

$$\frac{R^\tau(z)}{R^\tau(-z)} = \mathrm{e}^{-8\pi\dim(V_\tau)C_X\cdot z}. \tag{8.19}$$

2) Für die Ruellesche Zetafunktion $R^\tau(z)$ gilt

$$R^\tau(z) = \prod_{w\in W^1} \det{}_{\mathrm{s}}(\Delta(w) + z(z+2\lambda_\tau(w)))^{(-1)^{\ell(w)+1}}\, \mathrm{e}^{-8\pi\dim(V_\tau)C_X\cdot z}.$$

Beweis. Zu 2): Aus Theorem 8.9 und Satz 6.2 folgt, dass die Ruellesche Zetafunktion $R^\tau(z)$ gleich

$$\prod_{w\in W^1}\left(\det{}_{\mathrm{s}}(\Delta(w)+z(z+2\lambda_\tau(w)))\exp\Big(-4\pi\,\mathrm{Vol}(X)\int_0^{z+\lambda_\tau(w)} P(\lambda;w)\mathrm{d}\lambda\Big)\right)^{(-1)^{\ell(w)+1}}$$

ist. Mit Lemma 8.11 erhalten wir dann die Aussage. □

Damit kommen wir zum Hauptergebnis dieser Arbeit:

Theorem 8.13. *Die Ruellesche Zetafunktion $R^\tau(z)$ ist an der Stelle $z=0$ regulär mit*

$$R^\tau(0) = T^{\mathrm{an}}(\tau)^4.$$

Beweis. Aus Theorem 8.12 2) folgt, dass die Laurent-Entwicklung von $R^\tau(z)$ an der Stelle $z=0$ von der folgenden Form ist:

$$\prod_{w\in W^1}\Big(\det{}_{\mathrm{s}}(\Delta(w)')(z^2+2z\lambda_\tau(w))^{N_w}\Big)^{(-1)^{\ell(w)+1}} + O(z^{1+q}),$$

wobei $q = \sum_{w\in W^1}(-1)^{\ell(w)+1}N_w$ wie in (7.24) definiert ist. Damit ist

$$R^\tau(0) = \prod_{w\in W^1} \det{}_{\mathrm{s}}(\Delta(w)')^{(-1)^{\ell(w)+1}}.$$

Aus Satz 7.5 folgt die Aussage. □

9 Diskussion

9.1 Die super Ruellesche Zetafunktion

Zum Abschluss wollen wir den Wert der durch die Darstellungen τ und τ_θ von G induzierten Ruelleschen Zetafunktionen an der Stelle $z = 0$ bestimmen. Dazu bemerken wir, dass aus Korollar 4.3 und Definition von $R^\tau(z)$ als das Produkt von $Z_R^\tau(z)$ und $Z_R^{\tau_\theta}(z)$ folgt, dass das Hauptergebnis in folgender Form geschrieben werden kann

$$Z_R^\tau(0) Z_R^{\tau_\theta}(0) = T^{\mathrm{an}}(\tau)^2 \cdot T^{\mathrm{an}}(\tau_\theta)^2. \tag{9.1}$$

Um mehr über die einzelne induzierte Ruellesche Zetafunktionen zu erfahren betrachten wir die *super* Ruellesche Zetafunktion $R_s^\tau(z)$, die wie folgt definiert ist.

$$R_s^\tau(z) := \frac{Z_R^\tau(z)}{Z_R^{\tau_\theta}(z)}.$$

Aus der Produktdarstellung von $Z_R^\tau(z)$ und $Z_R^{\tau_\theta}(z)$ durch Selbergsche Zetafunktionen $Z_S(z + \lambda_\tau(w); \nu_\tau(w))$ und $Z_S(z + \lambda_{\tau_\theta}(w); \nu_{\tau_\theta}(w))$ in Abschnitt 6 erhalten wir

$$R_s^\tau(z) = \prod_{w \in W^1} \left(\frac{Z_S(z + \lambda_\tau(w); \nu_\tau(w))}{Z_S(z + \lambda_\tau(w); w_A \nu_\tau(w))} \right)^{(-1)^{\ell(w)+1}},$$

wobei wir ausgenutzt haben, dass $\lambda_{\tau_\theta}(w) = \lambda_\tau(w)$ und $\nu_{\tau_\theta}(w) = w_A \nu_\tau(w)$ für alle $w \in W^1$ ist. Wir folgen Bunke/Olbrich [BO95, Seite 92] und definieren die *super* Selbergsche Zetafunktion $S_s(z; w)$ durch:

$$S_s(z; w) := \frac{Z_S(z; \nu_\tau(w))}{Z_S(z; w_A \nu_\tau(w))}.$$

Damit erhalten wir folgende Produktdarstellung der super Ruelleschen Zetafunktion $R_s^\tau(z)$ durch die super Selbergschen Zetafunktionen $S_s(z + \lambda_\tau(w); w)$:

$$R_s^\tau(z) = \prod_{w \in W^1} S_s(z + \lambda_\tau(w); w)^{(-1)^{\ell(w)+1}}.$$

Die super Selbergschen Zetafunktionen werden im allgemeineren Rahmen von Bunke/Olbrich untersucht. Insbesondere zeigen sie [BO95, Theorem 3.18], dass die super Selbergsche Zetafunktion $S_s(z; w)$ folgender Funktionalgleichung genügt:

$$S_s(z; w) S_s(-z; w) = \mathrm{e}^{2\pi i \eta(\not{D}(w))}, \tag{9.2}$$

wobei $\eta(\not{D}(w))$ die Eta-Invariante von $\not{D}(w)$ ist. Hier ist $\not{D}(w)$ der Dirac-Operator auf dem lokal homogenen graduierten Spinor-Bündel $\not{E}(w)$ über X, das durch die Darstellung $\nu_\tau(w) \oplus w_A \nu_\tau(w)$ von M mittels des Isomorphismus (7.14) induziert wird. Wir schreiben $\mathrm{Spin}(\mathfrak{p})$ für die $\mathbb{Z}_2$-Überlagerung von $\mathrm{SO}(\mathfrak{p})$, die in der Clifford-Algebra $\mathbb{C}\ell(\mathfrak{p})$ liegt. Weil $\mathfrak{p}$ ungeradedimensional ist, hat $\mathbb{C}\ell(\mathfrak{p})$ genau zwei einfache Moduln $(c_\pm, L_\pm)$, die bei der

Einschränkung auf $\mathrm{Spin}(\mathfrak{p})$ äquivalent sind. Es sei (σ, S) die Spin-Darstellung von K. Es sei $\omega(w) \in R(K)$ die virtuelle Darstellung aus (7.14) und $\widetilde{E}(w)$ das assoziierte virtuelle Vektorraumbündel über $\widetilde{X}$. Dann ist $\widetilde{\not{E}}(w)$ das zur Darstellung $\sigma \otimes \omega(w)$ assoziierte homogene Vektorraumbündel über $\widetilde{X}$. Wir verzichten an dieser Stelle auf die Einzelheiten und verweisen auf [MS89].

Bemerkung. Die Eta-Invariante eines selbstadjungierten elliptischen Differentialoperators A auf einer kompakten Mannigfaltigkeit X wurde von Atiyah, Patodi und Singer [APS76] eingeführt im Zusammenhang mit der Index-Theorie für Mannigfaltigkeiten mit Rand. Sie ist eine spektrale Invariante, die die Asymmetrie des Spektrums $\sigma(A)$ misst.
Es sei A ein selbstadjungierter elliptischer Differentialoperator auf den Schnitten eines Hermiteschen Vektorraumbündels E über einer geschlossenen Mannigfaltigkeit X der Dimension d. Die Eta-Funktion von A ist definiert durch

$$\eta(s; A) := \sum_{\substack{\mu \in \sigma(A) \\ \mu \neq 0}} \frac{\mathrm{sign}(\mu)}{|\mu|^s}, \quad \mathrm{Re}(s) > d/m,$$

wobei m die Ordnung von A ist. Mit Hilfe der Mellin-Transformation zeigt man, dass

$$\eta(s; A) = \frac{1}{\Gamma(\frac{s+1}{2})} \int_0^\infty \mathrm{Tr}(A\, \mathrm{e}^{-tA^2}) t^{(s-1)/2} \mathrm{d}t, \quad \mathrm{Re}(s) > d/m.$$

Die Methode der Wärmeleitungsgleichung liefert uns eine asymptotische Entwicklung von $\mathrm{Tr}(A\, \mathrm{e}^{-tA^2})$ für $t \to 0^+$ von der folgenden Form:

$$\mathrm{Tr}(A\, \mathrm{e}^{-tA^2}) \sim t^{-(d+1)/m} \sum_{k=1}^\infty a_k t^{k/m}.$$

Diese benutzt man, um die Eta-Funktion auf die gesamte komplexe Ebene fortzusetzen. Es ist ein nicht triviales Resultat, dass $\eta(s; A)$ in $s = 0$ immer holomorph ist [APS76], [Gil84, Abschnitt 4.3]. Zum Beweis dieser Aussage benötigt man globale Argumente, weil das lokale Residuum in $s = 0$ von $\eta(s; A)$ nicht verschwindet. Der Wert von $\eta(0; A)$ heißt die *Eta-Invariante* $\eta(A)$ von A.

Aus (9.2) erhalten wir, dass die super Ruellesche Zetafunktion $R_s^\tau(z)$ folgender Funktionalgleichung genügt:

$$R_s^\tau(z) R_s^\tau(-z) = \prod_{w \in W^1} \mathrm{e}^{2\pi i (-1)^{\ell(w)+1} \eta(\not{D}(w))}.$$

Daraus erhalten wir $R_s^\tau(0) = \prod_{w \in W^1} \mathrm{e}^{\pi i (-1)^{\ell(w)+1} \eta(\not{D}(w))}$ und damit schließlich

$$Z_R^\tau(0) = Z_R^{\tau_\theta}(0) \prod_{w \in W^1} \mathrm{e}^{\pi i (-1)^{\ell(w)+1} \eta(\not{D}(w))}.$$

Das Einsetzen dieser Relation in (9.1) ergibt

$$Z_R^\tau(0) = T^{\mathrm{an}}(\tau)^2 \prod_{w \in W^1} \mathrm{e}^{\frac{\pi}{2} i (-1)^{\ell(w)+1} \eta(\not{D}(w))}$$

$$Z_R^{\tau_\theta}(0) = T^{\mathrm{an}}(\tau_\theta)^2 \prod_{w\in W^1} \mathrm{e}^{-\frac{\pi}{2}i(-1)^{\ell(w)+1}\eta(\not{D}(w))}\,.$$

Wir bemerken, dass die induzierten Ruelleschen Zetafunktionen $Z_R^\tau(z)$ und $Z_R^{\tau_\theta}(z)$ in $z = 0$ insbesondere komplex sind. Weil die induzierte analytische Torsion $T^{\mathrm{an}}(\tau) = T^{\mathrm{an}}(\tau_\theta)$ reell ist, erhalten wir damit, dass $Z_R^\tau(0) = \overline{Z_R^{\tau_\theta}(0)}$, wobei $\overline{}$ die komplexe Konjugation bezeichnet. Diese Tatsache legt es nahe eine Modifikation der analytischen Torsion als einen Kandidaten für den Wert von $Z_R^\tau(z)$ in $z = 0$ zu suchen.

9.2 Komplexe Torsion

Wir erinnern an die Definition der analytischen Torsion $T^{\mathrm{an}}(\chi)$ in Abschnitt 2:

$$T^{\mathrm{an}}(\chi)^2 = \prod_{r=0}^{d} \det(\Delta_r(\chi))^{(-1)^r r},$$

wobei $\Delta_r(\chi) = \delta_\chi \mathrm{d}_\chi + \mathrm{d}_\chi \delta_\chi$ der Hodge-Laplace-Operator auf $L^2\Lambda^r(X, E^\chi)$ ist mit

$$\delta_\chi = (-1)^{d(r+1)+1} * \circ \sharp^{-1} \circ \mathrm{d}_\chi \circ \sharp \circ *$$

auf $\Lambda^r(X, E^\chi)$. Mit $\sharp\colon E^\chi \to E^{\chi *}$ bezeichnen wir den durch die Hermitesche Metrik h^χ induzierten Isomorphismus, die wir frei gewählt haben. Im Falle einer azyklischen Darstellung χ der Fundamentalgruppe von X haben wir oben festgestellt, dass $T^{\mathrm{an}}(\chi)$ nicht von der Wahl einer Hermiteschen Struktur auf dem assoziierten flachen Vektorraumbündel E^χ abhängt. Wir greifen die Idee von Barverman/Kappeler [BK05] zur Definition einer komplexen Torsion auf und betrachten den Operator

$$\delta_\chi^\flat := (-1)^{d(r+1)+1} *_\chi \mathrm{d}_\chi *_\chi,$$

anstelle von δ_χ, wobei $*_\chi$ die Fortsetzung des Hodge-Stern-Operators in $\Lambda^r T^*X$ auf $\Lambda^r T^*X \otimes E^\chi$ durch $* \otimes \mathrm{Id}_\chi$ bezeichnet. Dann definieren wir den *flachen* Hodge-Laplace-Operator $\Delta_r^\flat(\chi)$ auf $\Lambda^r(X, E^\chi)$ durch:

$$\Delta_r^\flat(\chi) := \delta_\chi^\flat \mathrm{d}_\chi + \mathrm{d}_\chi \delta_\chi^\flat.$$

Als ein Operator in $L^2\Lambda^r(X, E^\chi)$ ist der flache Hodge-Laplace-Operator offensichtlich nicht selbstadjungiert. Wir bemerken, dass die Hauptsymbole von $\Delta_r(\chi)$ und $\Delta_r^\flat(\chi)$ übereinstimmen:

$$\sigma_{\mathrm{pr}}(\Delta_r(\chi)) \cong \sigma_{\mathrm{pr}}(\Delta_r^\flat(\chi)).$$

Zum Beweis betrachten wir

$$A := \delta_\chi - \delta_\chi^\flat\colon \Lambda^r(X, E^\chi) \to \Lambda^{r-1}(X, E^\chi).$$

Dies ist ein Operator nullter Ordnung, also eine glatte Abbildung zwischen den Vektorraumbündeln $\Lambda^r T^*X \otimes E^\chi$ und $\Lambda^{r-1} T^*X \otimes E^\chi$. Daraus folgt, dass die Differenz

$$S := \Delta_r(\chi) - \Delta_r^\flat(\chi)$$

ein Differentialoperator von höchstens erster Ordnung ist.
Damit ist der flache Hodge-Laplace-Operator ein elliptischer Differentialoperator zweiter Ordnung mit einem selbstadjungierten Hauptsymbol.
Wir betrachten die Differentialoperatoren $\Delta_r^\flat(\chi)$ und S auf $H^2\Lambda^r(X; E^\chi)$. Es sei λ ein Element der Resolventenmenge von $\Delta_r(\chi)$. Dann ist die Resolvente

$$(\lambda \,\mathrm{Id} - \Delta_r(\chi))^{-1} : L^2\Lambda^r(X; E^\chi) \to L^2\Lambda^r(X; E^\chi)$$

von $\Delta_r(\chi)$ ein kompakter Operator. Weil die Ordnung von S höchstens Eins ist, ist auch $S(\lambda \,\mathrm{Id} - \Delta_r(\chi))^{-1}$ ein kompakter Operator auf $L^2\Lambda^r(X; E^\chi)$. Das heißt, $\Delta_r^\flat(\chi)$ ist eine *relativ kompakte Störung* von $\Delta_r(\chi)$, siehe [RS78, Abschnitt XIII.4], insbesondere Theorem XIII.14 von H. Weyl über das wesentliche Spektrum, woraus letztlich folgt, dass die Spektren von $\Delta_r(\chi)$ und $\Delta_r^\flat(\chi)$ in ihrem Häfungspunkt (∞) übereinstimmen. Aus der Relation:

$$(\lambda \,\mathrm{Id} - \Delta_r^\flat(\chi))^{-1} = (\lambda \,\mathrm{Id} - \Delta_r(\chi))^{-1}(\mathrm{Id} + S(\lambda - \Delta_r(\chi))^{-1})^{-1}$$

folgt, dass das Spektrum von $\Delta_r^\flat(\chi)$ *diskret* ist und die verallgemeinerten Eigenräume zum Eigenwert $\lambda \in \sigma(\Delta_r^\flat(\chi))$ endlichdimensional sind, d.h.,

$$\dim \cup_l \ker(\lambda \,\mathrm{Id} - \Delta_r^\flat(\chi))^l < \infty. \tag{9.3}$$

Weiter erhält man [GK69, Kapitel. V, Lemma 10.1], dass die Einschränkung von $\Delta_r^\flat(\chi)$ auf das orthogonale Komplement $\cap_l \mathrm{Im}((\lambda \,\mathrm{Id} - \Delta_r^\flat(\chi))^l)$ von verallgemeinerten Eigenräumen $\cup_l \ker((\lambda \,\mathrm{Id} - \Delta_r^\flat(\chi))^l))$ zu $\lambda \in \sigma(\Delta_r^\flat(\chi))$ in $L^2\Lambda^r(X, E^\chi)$ bijektiv ist, d.h.,

$$L^2\Lambda^r(X; E^\chi) = \cup_l \ker(\Delta_r^\flat(\chi)^l) \oplus \cap_l \mathrm{Im}(\Delta_r^\flat(\chi)^l).$$

Daraus folgt, dass es ein vollständiges System von verallgemeinerten Eigenfunktionen existiert, das jedoch keine Basis von $L^2\Lambda^r(X, E^\chi)$ bildet. Für die Einzelheiten siehe [GK69, Kapitel V.8]. Die elliptische Regularitätstheorie liefert, dass die verallgemeinerten Eigenfunktionen zum Eigenwert λ glatt sind, d.h.,

$$\cup_l \ker(\lambda \,\mathrm{Id} - \Delta_r^\flat(\chi))^l \subset \Lambda^r(X; E^\chi).$$

Es sei $N(R; \Delta_r^\flat(\chi))$ die Eigenwertzählfunktion des flachen Hodge-Laplace-Operators:

$$N(R; \Delta_r^\flat(\chi)) := \#\{\mu_i \in \sigma(\Delta_r^\flat(\chi)) \mid |\mu_i| < R\}.$$

Theorem 9.1 (Die Weylsche Formel für $\Delta_r^\flat(\chi)$)**.** *Die Eigenwertzählfunktion von $\Delta_r^\flat(\chi)$ hat das folgende asymptotisches Verhalten:*

$$N(R; \Delta_r^\flat(\chi)) \sim CR^{d/2} \quad R \to \infty, \tag{9.4}$$

wobei C eine Konstante ist, die von X und χ abhängt.

Beweis. Der Beweis dieses Theorems geht für relativ kompakte Störungen beliebiger selbstadjungierter Differentialoperatoren auf Markus und Matsaev [MM82] zurück. Für elliptische Differentialoperatoren siehe [Mar88, Theorem I.10.1]. Der Beweis basiert auf folgender Überlegung:

$$N(R; \Delta_r^\flat(\chi)) - N(R; \Delta_r(\chi)) = O(N(R + \|A\| R^{1/2}; \Delta_r(\chi)) - N(R - \|A\| R^{1/2}; \Delta_r(\chi))),$$

wobei $N(R; \Delta_r(\chi))$ die Eigenwertzählfunktion von $\Delta_r(\chi)$ ist. □

Weiter können wir die Teilmenge der komplexen Ebene, in der das Spektrum von $\Delta_r^\flat(\chi)$ liegt, genau beschreiben. Dafür benutzen wir ein ähnliches Argument, wie in [APS76] für den ungeraden Signatur-Operator B_{ev} mit einem flachen nicht-unitären Twist.

Satz 9.2. *Das Spektrum von $\delta_\chi^\flat$ liegt im Steifen*

$$-\|A\| \leq \mathrm{Im}(\lambda) \leq \|A\|.$$

Wenn $A \neq 0$, dann liegt das Spektrum von $\Delta_r^\flat(\chi)$ auf oder in der Parabel:

$$\mathrm{Re}(\lambda) \geq \frac{\mathrm{Im}(\lambda)^2}{4\|A\|^2} - \|A\|^2,$$

die die positive reelle Achse umfasst.
Wenn $A = 0$, dann ist $\Delta_r^\flat(\chi) = \Delta_r(\chi)$ und das Spektrum ist reell.

Beweis. Für $0 \leq t \leq 1$ sei

$$A_t(\lambda) := (\lambda \,\mathrm{Id} - (\mathrm{d}_\chi + \delta_\chi + tA)).$$

Nach Definition ist $A_t(\lambda)$ für alle t ein elliptischer Differentialoperator erster Ordnung. Ferner ist $A_t(\lambda)\colon H^1\Lambda^r(X, E^\chi) \to L^2\Lambda^r(X, E^\chi)$ ein Fredholm-Operator. Weil nach Konstruktion $A_0(\lambda)$ selbstadjungiert ist, verschwindet sein Index, d.h.,

$$\mathrm{Ind}(A_0(\lambda)) = 0.$$

Weil $A_1(\lambda)$ ein Fredholm-Operator ist, folgt aus der Homotopie-Invarianz des Indexes, dass $\mathrm{Ind}(A_1(\lambda)) = 0$. Deshalb gilt: Wenn $\ker(A_1(\lambda)) = \{0\}$ ist, dann ist auch $\mathrm{coker}(A_1(\lambda)) = \{0\}$. Also ist $A_1(\lambda)$ surjektiv und damit ein Isomorphismus. Daraus folgt, dass λ nicht im Spektrum von $\mathrm{d}_\chi + \delta_\chi^\flat$ liegt, außer es existiert eine Eigenfunktion zum Eigenwert λ. Es sei $\{\psi_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ eine orthonormale Basis von $L^2\Lambda^r(X, E^\chi)$ die aus Eigenschnitten von $\mathrm{d}_\chi + \delta_\chi$ zu den Eigenwerten $\mu_j \in \mathbb{R}$ besteht. Es sei

$$\psi = \sum_{j=1}^{\infty} v_j \psi_j,$$

mit $\sum_j |v_j|^2 = 1$. Dann ist

$$\|(\lambda \,\mathrm{Id} - (\mathrm{d}_\chi + \delta_\chi^\flat))\psi\| = \|(\lambda \,\mathrm{Id} - (\mathrm{d}_\chi + \delta_\chi + A))\psi\|$$

$$
\begin{aligned}
&\geq \|(\lambda \operatorname{Id} - (\mathrm{d}_\chi + \delta_\chi))\psi\| - \|A\psi\| \\
&= \Big(\sum_{j=1}^{\infty} (\operatorname{Im}(\lambda)^2 + (\operatorname{Re}(\lambda) - \mu_j)^2)|v_j|^2\Big)^{1/2} - \|A\| \\
&\geq |\operatorname{Im}(\lambda)| - \|A\|.
\end{aligned}
$$

Damit ist der Kern von $A_1(\lambda)$ für $|\operatorname{Im}(\lambda)| > \|A\|$ trivial: $(\lambda \operatorname{Id} - (\mathrm{d}_\chi + \delta^\flat_\chi))\psi \neq 0$. Daraus folgt der erste Teil der Aussage. Zum Beweis des zweiten Teils bemerken wir, dass die Parabel gerade das Bild von $z \mapsto z^2$ der Geraden $\operatorname{Im}(z) = \pm\|A\|$ ist. □

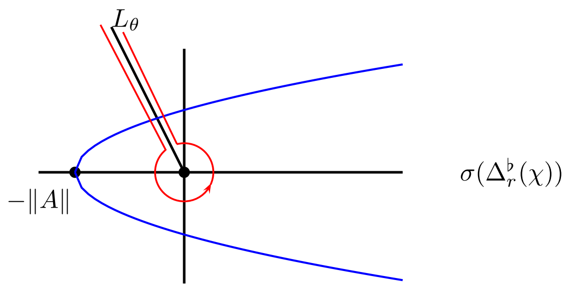

Abbildung 1: Das Spektrum von $\Delta^\flat_r(\chi)$

Wir sind damit in der Lage die Zeta-Funktion von $\Delta^\flat_r(\chi)$ zu definieren:

$$\zeta_{(\theta)}(s; \Delta^\flat_r(\chi)) = \operatorname{Tr} \Delta^\flat_r(\chi)'^{-s},$$

wobei Tr die Matrix-Spur bezeichnet. Die komplexe Potenz $\Delta^\flat_r(\chi)'^{-s}$ des auf das orthogonale Komplement von $\cup_l \ker(\Delta^\flat_r(\chi))^l$ eingeschränkten flachen Hodge-Laplace-Operators $\Delta^\flat_r(\chi)'$ ist definiert durch

$$\Delta^\flat_r(\chi)'^{-s} = \frac{i}{2\pi} \int_{\Gamma_{(\theta)}} \mathrm{e}^{-s \log_{(\theta)}(\mu)} (\Delta^\flat_r(\chi)' - \mu \operatorname{Id})^{-1} \mathrm{d}\mu,$$

wobei $\Gamma_{(\theta)}$ ein Integrationsweg wie in Abbildung 1 und $\log_{(\theta)}$ der Logarithmus bezüglich des Spektralschnitts $L_{(\theta)}$ ist. Siehe auch die Diskussion in Abschnitt A.2. Nach einem Theorem von Lidskii [GK69] folgt, dass die Matrix-Spur von $\Delta^\flat_r(\chi)'^{-s}$ mit der spektralen Spur übereinstimmt:

$$\zeta_{(\theta)}(s; \Delta^\flat_r(\chi)) = \sum_{\substack{\mu \in \sigma(\Delta^\flat_r(\chi)) \\ \mu \neq 0}} \mathrm{e}^{-s \log_{(\theta)}(\mu)}.$$

Aus Theorem 13.1 in[Shu01] folgt, dass die Zeta-Funktion von $\Delta^\flat_r(\chi)$ in $s = 0$ regulär ist. Wir definieren

$$\det_{(\theta)}(\Delta^\flat_r(\chi)') = \exp\Big(-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} \zeta_{(\theta)}(s; \Delta^\flat_r(\chi))\Big|_{s=0}\Big).$$

Man kann zeigen [BK05, Abschnitt 3.10], dass die Determinante von $\Delta^\flat_r(\chi)$ nicht von der Wahl eines Spektralschnitts abhängt insofern dieser nicht vollständig in der parabolischen Umgebung des Spektrums von $\Delta^\flat_r(\chi)$ liegt.
Wir definieren die *komplexe* Torsion $T^{\mathrm{c}}(\chi)^2$ durch

$$T^{\mathrm{c}}(\chi)^2 = \prod_{r=0}^{d} \det(\Delta^\flat_r(\chi)')^{(-1)^r r}.$$

Im Gegensatz zur analytischen Torsion $T^{\mathrm{an}}(\chi)^2$ ist die komplexe Torsion $T^{\mathrm{c}}(\chi)^2$ eine komplexe Zahl.

Vermutung. *Der Wert der induzierten Ruelleschen Zetafunktion $Z^\tau_R(z)$ in $z = 0$ ist die komplexe Torsion*

$$T^{\mathrm{c}}(\tau)^2 = \prod_{r=0}^{2n+1} \det(\Delta^\flat_r(\tau)')^{(-1)^r r}.$$

Eine der Schwierigkeiten beim Beweis dieser Vermutung ist es, den Kern des Wärmeleitungsoperators $\mathrm{e}^{-t\Delta^\flat_r(\chi)}$ mit einer $K \times K$-äquivarianten Abbildung auf G mit Werten in $\mathrm{End}(\Lambda^r \mathfrak{p}^* \otimes V_\tau)$ zu identifizieren, wie wir es in Abschnitt 3.2 für selbstadjungierte Bochner-Laplace-Operatoren durchgeführt haben. Ferner können wir aus der Voraussetzung, dass die induzierte Darstellung χ azyklisch ist, nicht die Trivialität der verallgemeinerten Eigenräume zum Eigenwert Null folgern.

A Determinanten verallgemeinerter Laplace-Operatoren

Es sei X eine geschlossene, orientierbare Riemannsche Mannigfaltigkeit der Dimension d. Sei $E \to X$ ein Hermitesches Vektorraumbündel mit Fasermetrik h. Durch die Riemannsche Metrik g und die Fasermetrik h erhalten wir ein inneres Produkt im Raum der C^∞-Schnitte $C^\infty(X, E)$ von E, das definiert ist durch

$$\langle \phi, \psi \rangle := \int_X h(\phi(x), \psi(x) \mathrm{d}\mathrm{vol}(x).$$

Dabei bezeichnen wir mit $\mathrm{d}\mathrm{vol}(x)$ das Volumenelement, das durch die Metrik g bestimmt wird. Es sei $L^2(X, E)$ die Vervollständigung von $C^\infty(X, E)$ bezüglich der Norm, die durch dieses innere Produkt induziert wird.
Es sei

$$\Delta\colon C^\infty(X, E) \to C^\infty(X, E)$$

ein verallgemeinerter Laplace-Operator, d.h., ein wesentlich selbstadjungierter Differentialoperator zweiter Ordnung mit dem Hauptsymbol

$$\sigma_\Delta(x, \xi) = \|\xi\|^2 \operatorname{Id}_{E_x}.$$

Es sei

$$\overline{\Delta}\colon D(\overline{\Delta}) \to L^2(X, E)$$

die selbstadjungierte Erweiterung von Δ, die wir im Weiteren mit Δ bezeichen. Es gilt dann $D(\Delta) = H^2(X, E)$, wobei $H^2(X, E)$ der Sobolevraum ist.

Lemma A.1. *Es sei* $\Delta\colon C^\infty(X, E) \to C^\infty(X, E)$ *ein selbstadjungierter verallgemeinerter Laplace-Operator. Dann ist das Spektrum* $\sigma(\Delta)$ *von* Δ *von der folgenden Form*

$$\sigma(\Delta)\colon \qquad -\infty < b_\Delta \le \mu_1 \le \mu_2 \le \cdots \to \infty.$$

Beweis. Siehe [Gil84, Lemma 1.6.4]. □

A.1 Die Theta-Funktion von Δ

Für $\phi \in H^2(X, E)$ betrachten wir das folgende Anfangswertproblem:

$$\begin{cases} (\frac{\partial}{\partial t} + \Delta)u(t; x) = 0, & \text{für } t > 0; \\ \lim_{t\to 0} u(t; x) = \phi(x), & \text{für alle } x \in X. \end{cases} \tag{A.1}$$

Um dieses Anfangswertproblem zu behandeln, bemerken wir, dass Δ eine Halbgruppe $\mathrm{e}^{-t\Delta}$ $(t \ge 0)$ erzeugt, die mittels Spektralzerlegung definiert werden kann: Es sei $\{\phi_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ eine orthonormale Basis von $L^2(X, E)$ aus Eigenschnitten von Δ. Aus dem Regularitätssatz für elliptische Operatoren folgt $\phi_j \in C^\infty(X, E)$ für alle $j \in \mathbb{N}$. Für $\phi \in L^2(X, E)$ ist dann $\mathrm{e}^{-t\Delta}\phi$ definiert durch

$$\mathrm{e}^{-t\Delta}\phi := \sum_{j=1}^\infty \mathrm{e}^{-t\mu_j}\langle\phi_j, \phi\rangle\phi_j,$$

wobei die Reihe in $L^2(X, E)$ konvergiert. Es gilt dann

$$\|\mathrm{e}^{-t\Delta}\phi\|^2 = \sum_{j=1}^\infty \mathrm{e}^{-2t\mu_j}|\langle\phi_j, \phi\rangle|^2 \le C\sum_{j=1}^\infty |\langle\phi_j, \phi\rangle|^2 = C\|\phi\|^2,$$

weil $\#\{\mu \in \sigma(\Delta) \mid \mu < 0\}$ endlich ist.
Daher ist $\mathrm{e}^{-t\Delta}$ ein beschränkter Operator im Hilbertraum $L^2(X, E)$.
Es sei $\phi \in H^2(X, E)$. Dann ist $\Delta\phi \in L^2(X, E)$ und es gilt

$$\|\Delta\phi\|^2 = \sum_{j=1}^\infty |\langle\phi_j, \Delta\phi\rangle|^2 = \sum_{j=1}^\infty \mu_j^2|\langle\phi_j, \phi\rangle|^2 < \infty.$$

Daraus folgt

Lemma A.2. *Es sei* $\phi \in H^2(X, E)$*. Dann gilt*

$$\mathrm{e}^{-t\Delta}\phi - \phi = -\int_0^t \mathrm{e}^{-\tau\Delta}\Delta\phi\,\mathrm{d}\tau \quad \textit{für} \quad t \ge 0.$$

Beweis. Aus der Spektralzerlegung folgt

$$\begin{aligned} e^{-t\Delta}\phi - \phi &= \sum_{j=1}^{\infty}(e^{-t\mu_j} - 1)\langle\phi_j, \phi\rangle\phi_j = -\sum_{j=1}^{\infty}\mu_j\Big(\int_0^t e^{-\tau\mu_j}\,d\tau\Big)\langle\phi_j, \phi\rangle\phi_j \\ &= -\int_0^t \sum_{j=1}^{\infty} e^{-\tau\mu_j}\langle\phi_j, \Delta\phi\rangle\phi_j d\tau = -\int_0^t e^{-\tau\Delta}\Delta\phi d\tau. \end{aligned}$$ □

Es sei $\phi \in H^2(X, E)$. Wir setzen

$$u(t) := e^{-t\Delta}\phi, \quad \text{für } t \in \mathbb{R}^+.$$

Dann folgt aus Lemma A.2, dass $\mathbb{R}^+ \ni t \mapsto u(t) \in H^2(X, E)$ eine differenzierbare Funktion ist, und es gilt

1) $\frac{d}{dt}u(t) = -\Delta e^{-t\Delta}\phi = -\Delta u(t)$;

2) $\lim_{t\to 0^+} u(t) = \phi$.

Damit haben wir gezeigt

Satz A.3. *Es sei $\phi \in H^2(X, E)$. Dann ist $u(t) := e^{-t\Delta}\phi$ die eindeutig bestimmte Lösung des Anfangwertproblems* (A.1).

Weil die Eigenwertzählfunktion

$$N(R; \Delta) := \#\{\mu \in \sigma(\Delta) \mid |\mu| \leq R\}$$

von Δ polynomial in R wächst und es endlich viele nicht positive Eigenwerte von Δ gibt, ist für alle $k \in \mathbb{N}_0$ und $t > 0$

$$\sum_{j=1}^{\infty}\mu_j^k e^{-t\mu_j} < \infty. \tag{A.2}$$

Es sei $\phi \in L^2(X, E)$. Dann folgt aus der Spektralzerlegung von Δ:

$$\Delta^k e^{-t\Delta}\phi = \sum_{j=1}^{\infty}\mu_j^k e^{-t\mu_j}\langle\phi_j, \phi\rangle\phi_j$$

und aus (A.2) erhalten wir

$$\|\Delta^k e^{-t\Delta}\phi\|^2 \leq \sum_{j=1}^{\infty}\mu_j^{2k} e^{-2t\mu_j}\|\phi\|^2 < \infty.$$

Daher ist $\Delta^k e^{-t\Delta}$ ein beschränkter Operator im Hilbertraum $L^2(X, E)$.

Satz A.4. *Für alle $t > 0$ ist $e^{-t\Delta}$ ein Glättungsoperator.*

Beweis. Es zu zeigen ist, dass für alle $l \in \mathbb{Z}$ und $k \in \mathbb{N}$ eine stetige lineare Fortsetzung von $\mathrm{e}^{-t\Delta}$ zu einem Operator

$$\mathrm{e}^{-t\Delta}\colon H^{2l}(X,E) \to H^{2(k+l)}(X,E)$$

existiert. Es sei $k \in \mathbb{N}$. Dann ist $(c\,\mathrm{Id} + \Delta_r)^k$ ein elliptischer Differentialoperator der Ordnung $2k$, wobei $c > -b_\Delta$. Aus der elliptischen Regularitätstheorie folgt, dass für alle $s \in \mathbb{R}$ Konstanten $C_1, C_2 > 0$ existieren, so dass für alle $\phi \in H^s(X,E)$ gilt:

$$C_1\|(c\,\mathrm{Id} + \Delta)^k\phi\|_s \le \|\phi\|_{2k+s} \le C_2\|(c\,\mathrm{Id} + \Delta)^k\|_s.$$

Seien $l \in \mathbb{Z}$ und $k \in \mathbb{N}$. Dann gilt für alle $\phi \in C^\infty(X,E)$:

$$\begin{aligned}\|\mathrm{e}^{-t\Delta}\phi\|_{2(k+l)} &\le C_2\|(c\,\mathrm{Id} + \Delta)^{l+k}\,\mathrm{e}^{-t\Delta}\phi\|_0\\ &\le C_2\|(c\,\mathrm{Id} + \Delta)^k\,\mathrm{e}^{-t\Delta}(b\,\mathrm{Id} + \Delta)^l\phi\|_0\\ &\le C_2\|(c\,\mathrm{Id} + \Delta)^k\,\mathrm{e}^{-t\Delta}\|\|\|(c\,\mathrm{Id} + \Delta)^l\phi\|_0\\ &\le C_3\|\phi\|_{2l}.\end{aligned}$$

□

Insbesondere folgt daraus

$$\mathrm{e}^{-t\Delta}(L^2(X,E)) \subset C^\infty(X,E).$$

Für $\phi \in C^\infty(X,E)$ sei

$$u(t;x) := \mathrm{e}^{-t\Delta}\phi(x), \qquad x \in X.$$

Dann gilt

1) $u \in C^\infty(\mathbb{R}^+ \times X, E)$ und $(\frac{\partial}{\partial t} + \Delta)u(t;x) = 0$.

2) $\lim_{t\to 0^+} u(t;x) = \phi(x)$, $x \in X$.

Damit löst $\mathrm{e}^{-t\Delta}\phi$ die Wärmeleitungsgleichung:

$$\begin{cases}(\frac{\partial}{\partial t} + \Delta)u(t;x) = 0, & \text{für } t > 0\\ \lim_{t\to 0} u(t;x) = \phi(x), & \text{für alle } x \in X.\end{cases}$$

Jetzt benötigen wir die Aussage des folgenden Lemmas.

Lemma A.5. *Es sei $P\colon L^2(X,E) \to L^2(X,E)$ ein stetiger linearer Operator. Für $k \in \mathbb{N}$ und $l > d/2 + k$ existiere für P eine stetige lineare Fortsetzung $P\colon H^{-l}(X,E) \to H^l(X,E)$. Dann ist P ein Integraloperator mit Kern $K \in C^k(X \times X, E \boxtimes E^*)$ und es gilt $\|K\|_{C^k} \le C\|P\|_{-l,l}$.*

Beweis. Siehe [Gil84]. □

Damit erhalten wir

Korollar A.6. *Für $t > 0$ ist $\mathrm{e}^{-t\Delta}$ ein Integraloperator mit einem C^∞-Kern $H_\Delta(t;x,y)$.*

Beweis. Folgt sofort aus Satz A.4 und Lemma A.5. □

Für $(t; x, y) \in \mathbb{R}^+ \times X \times X$ ist

$$H_\Delta(t; x, y) \in E_x \otimes E_y^*.$$

Für $\phi \in L^2(X, E)$ ist nach Definition des Kernes

$$(\mathrm{e}^{-t\Delta}\,\phi)(x) = \int_X H_\Delta(t; x, y)\phi(y)\mathrm{d}\,\mathrm{vol}(y).$$

Wir bestimmen jetzt die Entwicklung von $H_\Delta(t; x, y)$ bezüglich einer orthonormalen Basis $\{\phi_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ von $L^2(X, E)$ aus Eigenschnitten von Δ. Es sei

$$\Delta\phi_j = \mu_j\phi_j, \qquad j \in \mathbb{N}.$$

Satz A.7. *Es sei $t > 0$. Der Kern der Wärmeleitungsoperators hat folgende Entwicklung*

$$H_\Delta(t; x, y) = \sum_{j=1}^{\infty} \mathrm{e}^{-t\mu_j}\,\phi_j(x) \otimes \phi_j^*(y).$$

Die Reihe konvergiert in der C^∞-Topologie.

Beweis. Für $t > 0$ sei

$$H(t; x, y) := \sum_{j=1}^{\infty} \mathrm{e}^{-t\mu_j}\,\phi_j(x) \otimes \phi_j^*(y). \tag{A.3}$$

Es sei $m \geq 0$ und sei $s \in \mathbb{N}$, so dass $2s > d/2 + m$. Aus dem Einbettungssatz von Sobolev und der elliptischen Regularitätstheorie folgt, dass Konstanten $C_1, C_2 > 0$ existieren mit

$$\|\phi_j\|_{C^m} \leq C_1\|\phi_j\|_{2s} \leq C_2(\|\phi_j\|_0 + \|\Delta^s\phi_j\|_0) = C_2(1 + \mu_j^s).$$

Daraus folgt

$$\|H(t; x, y)\|_{C^m} \leq C_2^2 \sum_{j=1}^{\infty} \mathrm{e}^{-t\mu_j}(1 + \mu_j^s) < \infty.$$

Damit haben wir gezeigt, dass die Reihe (A.3) in der C^∞-Topologie konvergiert und $H(t; x, y)$ ein glatter Schnitt von $E \boxtimes E^*$ ist. Sei $\phi \in L^2(X, E)$. Dann gilt

$$\int_X H(t; x, y)\phi(y)\mathrm{d}\,\mathrm{vol}(y) = \sum_{j=1}^{\infty} \mathrm{e}^{-t\mu_j}\langle\phi_j, \phi\rangle\phi_j(x) = (\mathrm{e}^{-t\Delta}\,\phi)(x).$$

Da der Kern von $\mathrm{e}^{-t\Delta}$ eindeutig bestimmt ist, folgt $H_\Delta = H$. □

Der Wärmeleitungsoperator $\mathrm{e}^{-t\Delta}$ hat die folgenden Eigenschaften:

1) $(\frac{\partial}{\partial t} + \Delta)\,\mathrm{e}^{-t\Delta} = 0;$

2) $\forall\, \phi \in L^2(X, E) : \lim_{t\to 0^+} \mathrm{e}^{-t\Delta}\, \phi = \phi$;

3) $(\mathrm{e}^{-t\Delta})^* = \mathrm{e}^{-t\Delta}$.

Daraus folgt unmittelbar, dass der Kern $H_\Delta(t; x, y)$ des Wärmeleitungsoperators entsprechende Eigenschaften hat:

1) $(\frac{\partial}{\partial t} + \Delta_x)H_\Delta(t; x, y) = 0$;

2) $\forall\, \phi \in C^\infty(X, E) : \lim_{t\to 0^+} \int_X H_\Delta(t; x, y)(\phi(y))\mathrm{d}\,\mathrm{vol}(y) = \phi(x)$;

3) $H_\Delta(t; x, y)^* = H_\Delta(t; y, x)$.

Es ist nicht schwer den folgenden Satz zu beweisen:

Satz A.8. *Der Wärmeleitungskern $H_\Delta(t; x, y)$ von Δ ist durch die Eigenschaften 1)–3) eindeutig bestimmt.*

Der Kern $H_\Delta(t; x, y)$ heißt *Fundamentallösung* der Wärmeleitungsgleichung (A.1).
Satz A.8 ist wichtig für die Konstruktion der Fundamentallösung der Wärmeleitungsgleichung, da man die Fundamentallösung auf verschiedene Weise konstruieren kann. Um zu zeigen, dass die konstruierte Lösung tatsächlich die Fundamentallösung ist, müssen lediglich Eigenschaften 1)–3) nachgeprüft werden. Dies ist unser Ansatzpunkt in Abschnitt 3.

Satz A.9. *Für alle $t > 0$ ist $\mathrm{e}^{-t\Delta}$ ein Operator der Spurklasse.*

Beweis. Aufgrund der Halbgruppeneigenschaft von $\mathrm{e}^{-t\Delta}$ gilt

$$\mathrm{e}^{-2t\Delta} = \mathrm{e}^{-t\Delta} \circ \mathrm{e}^{-t\Delta}\,. \tag{A.4}$$

Es sei $\{\phi_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ eine orthonormale Basis von $L^2(X, E)$, die aus Eigenschnitten von Δ besteht. Dann ist

$$\|\, \mathrm{e}^{-t\Delta}\, \|^2_{\mathrm{HS}} = \sum_{j=1}^{\infty} \|\, \mathrm{e}^{-t\Delta}\, \phi_j\|^2 < \infty.$$

Daher ist $\mathrm{e}^{-t\Delta}$ ein Hilbert-Schmidt-Operator. Aus (A.4) folgt damit, dass $\mathrm{e}^{-2t\Delta_r(\chi)}$ ein Operator der Spurklasse ist. □

Es sei $\{\psi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ eine orthonormale Basis von $L^2(X, E)$. Die Spur von $\mathrm{e}^{-t\Delta}$ ist dann

$$\mathrm{Tr}\,\mathrm{e}^{-t\Delta} := \sum_{k=1}^{\infty} \langle \mathrm{e}^{-t\Delta}\, \psi_k, \psi_k\rangle.$$

Man sieht sofort ein, dass $\mathrm{Tr}\,\mathrm{e}^{-t\Delta}$ nicht von der Wahl der orthonormalen Basis abhängt. Wir definieren die *Theta-Funktion* $\vartheta_\Delta(t)$ von Δ

$$\vartheta_\Delta(t) := \mathrm{Tr}\,\mathrm{e}^{-t\Delta_r(\chi)} = \sum_{j=1}^{\infty} \mathrm{e}^{-t\mu_j}\,. \tag{A.5}$$

Es sei $\mathrm{tr}\colon E_x \otimes E_x^* \to \mathbb{C}$ die übliche Spur eines Endomorphismus. Für den Wärmeleitungskern $H_\Delta(t;x,y)$ ist $H_\Delta(t;x,x) \in \mathrm{End}(E_x)$ und wir können die Spur dieses Endomorphismus bilden. Nach Satz A.7 ist

$$H_\Delta(t;x,x) = \sum_{j=1}^{\infty} \mathrm{e}^{-t\mu_j}\, \phi_j(x) \otimes \phi_j^*(x).$$

Daraus folgt

$$\mathrm{tr}\, H_\Delta(t;x,x) = \sum_{j=1}^{\infty} \mathrm{e}^{-t\mu_j}\, \|\phi_j(x)\|^2.$$

Durch Integration beider Seiten erhalten wir

$$\sum_{j=1}^{\infty} \mathrm{e}^{-t\mu_j} = \int_X \mathrm{tr}\, H_\Delta(t;x,x) \mathrm{d}\,\mathrm{vol}(x).$$

Damit haben wir mit (A.5) folgenden Satz bewiesen.

Satz A.10. *Es sei $H_\Delta(t;x,y)$ der Kern des Wärmeleitungsoperators von Δ. Dann gilt für alle $t > 0$:*

$$\mathrm{Tr}\, \mathrm{e}^{-t\Delta} = \int_X \mathrm{tr}\, H_\Delta(t;x,x) \mathrm{d}\,\mathrm{vol}(x). \tag{A.6}$$

Ein weiteres Ziel ist es, eine Parametrix für den Wärmeleitungsoperator zu konstruieren. Dazu müssen wir den Wärmeleitungsoperator durch die Resolvente ausdrücken. Aus Lemma A.1 folgt, dass das Spektrum $\sigma(\Delta)$ von Δ in $[b_\Delta, \infty)$ enthalten ist. Daher gilt für die Resolventenmenge $\rho(\Delta)$ von Δ:

$$\mathbb{C} - [b_\Delta, \infty) \subset \rho(\Delta).$$

Es sei $\mu \in \mathbb{C} - [b_\Delta, \infty)$. Dann existiert $(\Delta - \mu\,\mathrm{Id})^{-1}$ und wir erhalten einen linearen, stetigen Operator

$$(\Delta - \mu\,\mathrm{Id})^{-1}\colon L^2(X,E) \to L^2(X,E).$$

Für $\phi \in L^2(X,E)$ ist

$$(\Delta - \mu\,\mathrm{Id})^{-1}\phi = \sum_{j=1}^{\infty} (\mu_j - \mu)^{-1} \langle \phi_j, \phi \rangle \phi_j.$$

Daraus folgt

$$\|(\Delta - \mu\,\mathrm{Id})^{-1}\phi\|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{|\langle \phi_j, \phi\rangle|^2}{|\mu_j - \mu|^2} \le \|\phi\|^2 \frac{1}{\mathrm{dist}(\mu, [b_\Delta, \infty))^2}, \tag{A.7}$$

wobei $\mathrm{dist}(\mu, [b_\Delta, \infty))$ den Abstand von μ zu $[b_\Delta, \infty)$ bezeichnet. Damit erhalten wir das folgende Lemma:

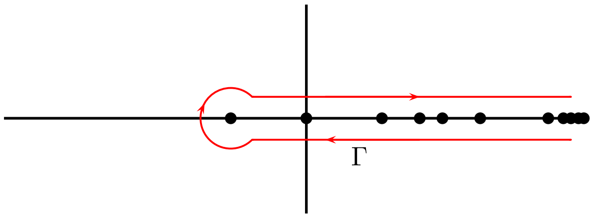

Abbildung 2: Integrationsweg Γ

Lemma A.11. *Es sei $\mu \in \mathbb{C} - [b_\Delta, \infty)$. Dann ist*

$$\|(\Delta - \mu\,\mathrm{Id})^{-1}\| \leq \frac{1}{\operatorname{dist}(\mu, [b_\Delta, \infty))}.$$

Es sei Γ ein Weg wie in Abbildung 2.

Lemma A.12. *Für $t > 0$ ist*

$$\mathrm{e}^{-t\Delta} = \frac{i}{2\pi} \int_\Gamma \mathrm{e}^{-t\mu} (\Delta - \mu\,\mathrm{Id})^{-1} \mathrm{d}\mu. \tag{A.8}$$

Durch Konstruktion einer Parametrix von $(\Delta - \mu\,\mathrm{Id})^{-1}$ mittels des Kalküls der Pseudodifferentialoperatoren erhält man das folgende Theorem.

Theorem A.13. *Es sei $\Delta\colon C^\infty(X, E) \to L^2(X, E)$ ein selbstadjungierter verallgemeinerter Laplace-Operator. Es sei $\vartheta_\Delta(t)$ die Theta-Funktion von Δ*

(1) Dann ist

$$\vartheta_\Delta(t) \sim \sum_{k=0}^{\infty} c_{k/2} t^{(k-d)/2} \quad \textit{für} \quad t \to 0^+, \tag{A.9}$$

wobei d die Dimension von X ist.

(2) Für ungerade k ist $c_{k/2} = 0$.

Beweis. Siehe [Gil84, Lemma 1.7.4]. □

Wir notieren die asymptotische Entwicklung (A.9) von $\vartheta_\Delta(t)$ für $t \to 0^+$ in folgender Form

$$\vartheta_\Delta(t) \sim \sum_\alpha c_\alpha t^\alpha \quad \text{für} \quad t \to 0^+,$$

wobei die Summe über $\{\alpha_k\}_{k \in \mathbb{N}_0}$ mit $\alpha_k := \frac{k-d}{2}$ gebildet wird.
Weiter ist

$$\vartheta_\Delta(t) - \sum_{\substack{\mu \in \sigma(\Delta) \\ \mu \leq 0}} \mathrm{e}^{-t\mu} = O(\mathrm{e}^{-t}) \quad \text{für} \quad t \to \infty. \tag{A.10}$$

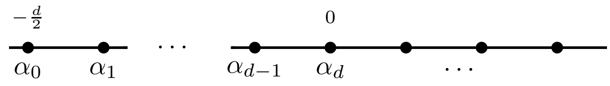

Abbildung 3: Koeffizienten asymptotischer Entwicklung von $\vartheta_\Delta(t)$

Wir sehen also, dass die Theta-Funktionen eines verallgemeinerten Laplace-Operators Δ auf eine geschlossenen Mannigfaltigkeit zulässig im Sinne der Laplace-Mellin-Transformation sind, siehe Einleitung.
Die *Xi-Funktion* ξ_Δ von Δ ist definiert durch die Laplace-Mellin-Transformation von $\vartheta_\Delta(t)$:

$$\xi_\Delta(s,p) := \int_0^\infty \mathrm{e}^{-tp}\,\vartheta_\Delta(t) t^{s-1} \mathrm{d}t$$

für $\mathrm{Re}(s) > d/2$ und $\mathrm{Re}(p) > -b_\Delta$, wobei $b_\Delta = \min\{\mu \mid \mu \in \sigma(\Delta)\}$.
Eine ausführlich Diskussion der Xi-Funktion findet man zum Beispiel im Buch von Jorgenson/Lang [JL93]. An dieser Stelle wollen wir einige Eigenschaften von $\xi_\Delta(s;p)$ herausarbeiten.

Lemma A.14. *Die Xi-Funktion $\xi_\Delta(s,p)$ hat eine meromorphe Fortsetzung für alle $s \in \mathbb{C}$ und $p \in U(b_\Delta) := \mathbb{C} - (-\infty, -b_\Delta]$. Ferner hat für alle $p \in U(b_\Delta)$ die Funktion $s \mapsto \xi_\Delta(s,p)$ einfache Polstellen in $-\alpha \in \{\alpha_k\}$ mit*

$$\mathrm{Res}(-\alpha; \xi_\Delta(\cdot, p)) = c_\alpha.$$

Beweis. Aus (A.10) erhält man leicht die Aussage für $p \mapsto \xi_\Delta(s,p)$. Für die meromorphe Fortsetzung von $s \mapsto \xi_\Delta(s,p)$ zerlegt man die Xi-Funktion von Δ in

$$\int_0^1 \mathrm{e}^{-tp}\,\vartheta_\Delta(t) t^{s-1} \mathrm{d}t + \int_1^\infty \mathrm{e}^{-tp}\,\vartheta_\Delta(t) t^{s-1} \mathrm{d}t$$

und benutzt dann die asymptotische Entwicklung von $\vartheta_\Delta(t)$ für $t \to 0^+$.
Einzelheiten findet man in [JL93, Theorem 1.5]. □

Satz A.15. *Die Xi-Funktion $\xi_\Delta(s,p)$ von Δ hat für alle s in einer Umgebung um 0 und für alle $p \in U(b_\Delta)$ die folgende Laurent-Entwicklung:*

$$\xi_\Delta(s,p) = \frac{a_{-1}(0,p)}{s} + a_0(0,p) + a_1(0,p)s + O(s^2), \tag{A.11}$$

wobei

$$a_{-1}(0,p) = \sum_{\alpha+i=0} (-1)^i \frac{p^i}{i!} c_\alpha.$$

Beweis. Es sei $p \in U(b_\Delta)$. Dann ist

$$\xi(s,p) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-tp}\,\vartheta(t) t^{s-1} \mathrm{d}t$$

$$= \int_0^\infty \mathrm{e}^{-tp}\,(\vartheta(t) - \sum_{\alpha\le 0} c_\alpha t^\alpha) t^{s-1}\mathrm{d}t + \sum_{\alpha\le 0} c_\alpha \int_1^\infty \mathrm{e}^{-tp}\, t^{s+\alpha-1}\mathrm{d}t$$
$$+ \sum_{\alpha\le 0} c_\alpha \int_0^1 \mathrm{e}^{-tp}\, t^{s+\alpha-1}\mathrm{d}t.$$

Die beiden ersten Integrale sind holomorph in $s = 0$ und $\mathrm{Re}(p) > 0$. Das dritte Integral wird zu

$$\begin{aligned}\sum_{\alpha\le 0} c_\alpha \int_0^1 \mathrm{e}^{-tp}\, t^{s+\alpha-1}\mathrm{d}t &= \sum_{\alpha\le 0} c_\alpha \int_0^1 \sum_{i=0}^\infty (-1)^i \frac{p^i}{i!} t^{s+\alpha+i-1}\mathrm{d}t \\ &= \sum_{\alpha\le 0}\sum_{i=0}^\infty (-1)^i \frac{p^i}{i!} c_\alpha \frac{1}{s+\alpha+i} \\ &= \Big(\sum_{\alpha+i=0} (-1)^i \frac{p^i}{i!} c_\alpha\Big)\frac{1}{s} + \phi(p) + O(s),\end{aligned}$$

wobei $\phi(p)$ eine ganze Funktion in p ist. □

Das konstante Glied in der Laurent-Entwicklung einer meromorphen Funktion G um s_0 bezeichnet man mit $\mathrm{Pf}_{s=s_0} G(s)$, wobei Pf für "***Partie finie***" nach Hadamard steht. Also ist

$$\mathrm{Pf}_{s=0}\,\xi_\Delta(s,p) := a_0(0,p). \tag{A.12}$$

Wir definieren die *verallgemeinerte Zeta-Funktion* von Δ durch

$$\zeta_\Delta(s,p) := \frac{1}{\Gamma(s)}\xi_\Delta(s,p).$$

Korollar A.16. *Die verallgemeinerte Zeta-Funktion $\zeta_\Delta(s,p)$ von Δ ist regulär in $s = 0$ für alle $p \in U(b_\Delta)$. Es gilt:*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\zeta_\Delta(s,p)\Big|_{s=0} = \mathrm{Pf}_{s=0}\,\xi_\Delta(s,p) + \gamma a_{-1}(0,p), \tag{A.13}$$

wobei γ die Eulersche Konstante ist.

Beweis. Aus

$$\frac{1}{\Gamma(s)} = s + \gamma s^2 + O(s^3) \tag{A.14}$$

folgt zunächst, dass

$$\zeta_\Delta(0,p) = a_{-1}(0,p) = \sum_{\alpha+i=0} (-1)^i c_\alpha \frac{p^i}{i!}. \tag{A.15}$$

Nach Satz A.15 hat $\xi_\Delta(s,p)$ in $s = 0$ höchstens eine einfache Polstelle. Damit ist

$$\zeta_\Delta(s,p) = a_{-1}(0,p) + \big(\mathrm{Pf}_{s=0}\,\xi(s,p) + \gamma a_{-1}(0,p)\big)s + O(s^2).$$

Daraus folgt sofort die Aussage. □

Für $p \in U(b_\Delta)$ sei

$$\det(\Delta + p) := \exp\Big(- \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\zeta_\Delta(s,p)|_{s=0}\Big)$$

die regularisierte Determinante von $\Delta + p\,\mathrm{Id}$.

Satz A.17. *1) Für alle $s \in \mathbb{C}$ und alle $p \in U(b_\Delta)$ gilt*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\xi_\Delta(s,p) = -\xi_\Delta(s+1,p).$$

2) Es gilt

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\,\mathrm{Pf}_{s=0}\,\xi_\Delta(s,p) = -\,\mathrm{Pf}_{s=1}\,\xi_\Delta(s,p). \tag{A.16}$$

Beweis. Zu 1): Für $\mathrm{Re}(s) > -\alpha_0$ und $\mathrm{Re}(p) > -b$ können wir die Grenzwerte nach Lemma A.14 vertauschen und erhalten somit:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\xi_\Delta(s,p) &= \int_0^\infty \Big(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\,\mathrm{e}^{-tp}\Big)\vartheta_\Delta(t)t^{s-1}\mathrm{d}t = -\int_0^\infty \mathrm{e}^{-tp}\,\vartheta_\Delta(t)t^s\mathrm{d}t\\ &= -\xi_\Delta(s+1,p).\end{aligned}$$

Durch analytische Fortsetzung erhält man dann die Aussage.
Zu 2): Folgt sofort nach Definition aus 1). □

Als Funktion in p hat $\mathrm{Pf}_{s=1}\,\xi_\Delta(s,p)$ eine meromorphe Fortsetzung auf $\mathbb{C}$ mit einfachen Polen in $p = -\mu_j$, wobei $\mu_j \in \sigma(\Delta)$ und

$$\mathrm{Res}(-\mu_j; \mathrm{Pf}_{s=1}\,\xi_\Delta(s,\cdot)) = \dim\ker(\Delta - \mu_j\,\mathrm{Id}). \tag{A.17}$$

A.2 Die ζ-regularisierte Determinante von Δ

Es sei X eine Mannigfaltigkeit der Dimension

$$\dim(X) = 2n+1.$$

Nach Satz A.13, 2) verschwinden die Koeffizienten c_α der asymptotischen Entwicklung von $\vartheta_\Delta(t)$ für $t \to 0^+$ für alle $\alpha \in \mathbb{Z}_0^-$. Damit ist $a_{-1}(0,p) = 0$ für alle $p \in U(b_\Delta)$. Aus (A.13) folgt

$$\log\det(\Delta + p) = -\,\mathrm{Pf}_{s=0}\,\xi_\Delta(s,p). \tag{A.18}$$

Zum Schluss wollen wir festhalten, dass nach Voros [Vor87, p 448 (5.1)] das asymptotische Verhalten von $\det(\Delta + p\,\mathrm{Id})$ für $p \to \infty$ in diesem Fall von der folgenden Form:

$$\log\det(\Delta + p) \sim -\sum_{k=0}^{\infty} c_{2k}\Gamma(2k)p^{-2k} \quad \text{für} \quad p \to \infty. \tag{A.19}$$

Wir wollen das Verhalten von $\det(\Delta + p\,\mathrm{Id})$ für $p \to 0$ beschreiben. Dazu benötigen wir die regularisierte Determinante von Δ, die mit Hilfe der Zeta-Funktion $\zeta_\Delta(s)$ von Δ definiert wird. Für $\mathrm{Re}(s) > d/2$ definieren wir die Zeta-Funktion von Δ

$$\zeta_\Delta(s) := \mathrm{Tr}\Delta'^{-s},$$

wobei Δ' die Einschränkung von Δ auf das orthogonale Komplement von $\ker(\Delta)$ in $L^2(X, E)$ ist; die komplexe Potenz von Δ' ist definiert durch

$$\Delta'^{-s} = \frac{i}{2\pi} \int_{\Gamma_{(\theta)}} \mathrm{e}^{-s \log_{(\theta)} \mu} (\Delta' - \mu\,\mathrm{Id})^{-1} \mathrm{d}\mu, \tag{A.20}$$

wobei $\log_{(\theta)}$ der Logarithmus bezüglich des Spektralschnitts $L_{(\theta)}$ ist mit

$$\theta \leq \mathrm{Im} \log_{(\theta)} \mu \leq 2\pi + \theta$$

und $\Gamma_{(\theta)}$ ein Integrationsweg wie in Abbildung 4.

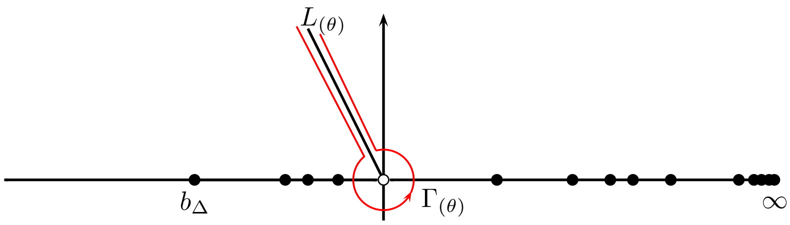

Abbildung 4: Ein Spektralschnitt $L_{(\theta)}$ von $\sigma(\Delta)$

Dabei ist $r_0 > 0$, so dass

$$\sigma(\Delta') \cap \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq r_0\} = \emptyset.$$

Die meromorphe Fortsetzung von $\zeta_\Delta(s)$ auf $\mathbb{C}$ mittels Mellin-Transformation von $\vartheta_\Delta(t)$ ist aufgrund des negativen Spektrums von Δ nicht anwendbar.

Wir folgen Shubin [Shu01, Kapitel II]. Durch Konstruktion einer Parametrix von $(\Delta - \mu\,\mathrm{Id})^{-1}$ mittels des Kalküls der Pseudodifferentialoperatoren erhält man das folgende Theorem.

Theorem A.18. *Die Zeta-Funktion $\zeta_\Delta(s)$ hat eine meromorphe Fortsetzung auf $\mathbb{C}$ mit einfachen Polstellen in $\alpha_k = \frac{k-d}{2}$, $k \in \mathbb{N}_0$. Für $s = -\alpha_k \in \mathbb{N}_0$ ist $\zeta_\Delta(s)$ regulär.*

Beweis. Siehe [Shu01, Theorem 13.1] □

Aus diesem Theorem folgt, dass $\zeta_\Delta(s)$ regulär in $s = 0$ ist. Wir definieren die regularisierte Determinante von Δ durch

$$\det(\Delta') := \exp\Big(- \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} \zeta_\Delta(s)\Big|_{s=0}\Big).$$

Wir bemerken, dass die Zeta-Funktion $\zeta_\Delta(s)$ von Δ von der Wahl des Spektralschnitts $L_{(\theta)}$ abhängt. Um diese Abhängigkeit zu dokumentieren schreiben wir $\zeta_{\Delta,(\theta)}(s)$ für die Zeta-Funktion von Δ bezüglich des Spektralschnitts $L_{(\theta)}$.

Lemma A.19. *Die regularisierte Determinante* $\det \Delta'$ *von* Δ *hängt nicht von der Wahl des Spektralschnitts* $L_{(\theta)}$ *ab.*

Beweis. Es sei $L_{(\theta')}$ ein weiterer Spektralschnitt von $\sigma(\Delta)$. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit nehmen wir an, dass $2\pi > \theta' > \theta > 0$ ist. Wenn θ' und θ in der selben Halbebene liegen, so gibt es nicht zu zeigen. Wir nehmen daher weiter an, dass θ' und θ nicht in der selben Halbebene liegen. Es sei also $\theta' > \pi > \theta$. Wir betrachten die nicht positiven Eigenwerte von Δ

$$b_\Delta \leq \mu_1 \leq \mu_2 \leq \ldots \leq \mu_p < 0.$$

Dann ist

$$\log_{(\theta')}(\mu_j) = \begin{cases} \log_{(\theta)}(\mu_j), & \text{für} \quad j > p; \\ \log_{(\theta)}(\mu_j) + 2\pi i, & \text{für} \quad 1 \leq j \leq p. \end{cases}$$

Also ist

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\zeta_{\Delta,(\theta')}(s)\Big|_{s=0} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\zeta_{\Delta,(\theta)}(s)\Big|_{s=0} = 2\pi i p.$$

Nach Definition der regularisierten Determinante folgt die Aussage. □

Es seien $\vartheta_\Delta(t)'$ die Theta-Funktion von Δ' und

$$N_\Delta := \dim \ker(\Delta).$$

Dann ist

$$\vartheta_\Delta(t)' = \vartheta_\Delta(t) - N_\Delta.$$

Daraus folgt

$$\vartheta_\Delta(t)' \sim t^{-d/2} \sum_{k=0}^{\infty} c_{k/2} t^{k/2} - N_\Delta, \quad \text{für} \quad t \to 0^+.$$

Wir definieren die Xi- und die verallgemeinerte Zeta-Funktion von Δ' durch

$$\xi_\Delta(s,p)' = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-tp}\, \vartheta_\Delta(t)' t^{s-1} \mathrm{d}t$$
$$\zeta_\Delta(s,p)' = \frac{1}{\Gamma(s)} \xi_\Delta(s,p)'.$$

Die asymptotische Entwicklung von $\vartheta_\Delta(t)'$ hat im Unterschied zur asymptotischen Entwicklung von $\vartheta_\Delta(t)$ für $t \to 0^+$ einen zusätzlichen Term $-N_\Delta t^0$.
Aus (A.13) folgt

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\zeta_\Delta(s,p)' = \mathrm{Pf}_{s=0}\, \xi_\Delta(s,p)' - \gamma N_\Delta,$$

wobei γ die Eulersche Konstante ist. Nach Definition ist

$$\mathrm{Pf}_{s=0}\, \xi_\Delta(s,p)' = \mathrm{Pf}_{s=0} \int_0^\infty \mathrm{e}^{-tp} (\vartheta_\Delta(t) - N_\Delta) t^{s-1} \mathrm{d}t$$

$$= \mathrm{Pf}_{s=0}\, \xi_\Delta(s,p) - N_\Delta \,\mathrm{Pf}_{s=0} \int_0^\infty \mathrm{e}^{-tp}\, t^{s-1} \mathrm{d}t.$$

Aus

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-tp}\, t^{s-1} \mathrm{d}t = \frac{1}{s} + (-\gamma - \log p) + O(s)$$

für s in einer Umgebung um Null folgt

$$\mathrm{Pf}_{s=0}\, \xi_\Delta(s,p)' = \mathrm{Pf}_{s=0}\, \xi_\Delta(s,p) + N_\Delta(\gamma + \log p).$$

Damit ist

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\zeta_\Delta(s,p)' = \mathrm{Pf}_{s=0}\, \xi(s,p) + N_\Delta \log p.$$

Die regularisierte Determinante von $\Delta' + p\,\mathrm{Id}$ ist

$$\begin{aligned} \det(\Delta' + p) &= \exp\Big(- \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\zeta_\Delta(s,p)'\Big) = \exp\Big(- \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\zeta_\Delta(s,p) - N_\Delta \log p\Big) \\ &= \det(\Delta + p) \cdot p^{-N_\Delta}. \end{aligned}$$

Aus $\lim_{p\to 0} \det(\Delta' + p) = \det(\Delta')$ folgt

$$\lim_{p\to 0} \det(\Delta + p) \cdot p^{-N_\Delta} = \det(\Delta'). \tag{A.21}$$

Literatur

[AB67] M. F. Atiyah and R. Bott, *A Lefschetz fixed point formula for elliptic complexes. I*, Ann. of Math. (2) **86** (1967), 374–407.

[APS76] M. F. Atiyah, V. K. Patodi, and I. M. Singer, *Spectral asymmetry and Riemannian geometry. III*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **79** (1976), no. 1, 71–99.

[Art89] J. G. Arthur, *Harmonic analysis of tempered distributions on semisimple Lie groups of real rank one*, Representation theory and harmonic analysis on semisimple Lie groups, Math. Surveys Monogr., vol. 31, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1989, Dissertation, Yale University, New Haven, CT, 1970, pp. 13–100.

[BK05] M. Braverman and T. Kappeler, *Refined Analytic Torsion*, 2005.

[BM83] D. Barbasch and H. Moscovici, *L^2-index and the Selberg trace formula*, J. Funct. Anal. **53** (1983), no. 2, 151–201.

[BO95] U. Bunke and M. Olbrich, *Selberg zeta and theta functions*, Mathematical Research, vol. 83, Akademie-Verlag, Berlin, 1995, Errata to the monograph.

[Bor63] A. Borel, *Compact Clifford-Klein forms of symmetric spaces*, Topology **2** (1963), 111–122.

[Brö98] U. Bröcker, *Die Ruellsche Zetafunktion für G-induzierte Anosov-Flüsse*, Ph.D. thesis, Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät II der Humbolt-Universität zu Berlin, September 1998.

[BW00] A. Borel and N. R. Wallach, *Continuous cohomology, discrete subgroups, and representations of reductive groups*, second ed., Mathematical Surveys and Monographs, vol. 67, American Mathematical Society, Providence, RI, 2000.

[Che73] P. R. Chernoff, *Essential self-adjointness of powers of generators of hyperbolic equations*, J. Functional Analysis **12** (1973), 401–414.

[CV90] P. Cartier and A. Voros, *Une nouvelle interprétation de la formule des traces de Selberg*, The Grothendieck Festschrift, Vol. II, Progr. Math., vol. 87, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1990, pp. 1–67.

[DeG77] D. L. DeGeorge, *Length spectrum for compact locally symmetric spaces of strictly negative curvature*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **10** (1977), no. 2, 133–152.

[DL82] H. Donnelly and P. Li, *Lower bounds for the eigenvalues of Riemannian manifolds*, Michigan Math. J. **29** (1982), no. 2, 149–161.

[Don79] H. Donnelly, *Asymptotic expansions for the compact quotients of properly discontinuous group actions*, Illinois J. Math. **23** (1979), no. 3, 485–496.

[Fri86a] D. Fried, *Analytic torsion and closed geodesics on hyperbolic manifolds*, Invent. Math. **84** (1986), no. 3, 523–540.

[Fri86b] ———, *The zeta functions of Ruelle and Selberg. I*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **19** (1986), no. 4, 491–517.

[Fri97] T. Friedrich, *Dirac-Operatoren in der Riemannschen Geometrie*, Advanced Lectures in Mathematics, Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1997.

[Gan68] R. Gangolli, *Asymptotic behaviour of spectra of compact quotients of certain symmetric spaces*, Acta mathematica **121** (1968), 151–192.

[Gan77a] ———, *The length spectra of some compact manifolds of negative curvature*, J. Differential Geom. **12** (1977), no. 3, 403–424.

[Gan77b] ———, *Zeta functions of Selberg's type for compact space forms of symmetric spaces of rank one*, Illinois J. Math. **21** (1977), no. 1, 1–41.

[GF52] I. M. Gel′fand and S. V. Fomin, *Geodesic flows on manifolds of constant negative curvature*, Uspehi Matem. Nauk (N.S.) **7** (1952), no. 1(47), 118–137.

[Gil84] P. Gilkey, *Invariance theory, the heat equation, and the Atiyah-Singer index theorem*, Mathematics Lecture Series, vol. 11, Publish or Perish Inc., Wilmington, DE, 1984.

[GK69] I. C. Gohberg and M. G. Kreĭn, *Introduction to the theory of linear nonselfadjoint operators*, Translated from the Russian by A. Feinstein. Translations of Mathematical Monographs, Vol. 18, American Mathematical Society, Providence, R.I., 1969.

[GKM75] D. Gromoll, W. Klingenberg, and W. Meyer, *Riemannsche Geometrie im Großen*, Springer-Verlag, Berlin, 1975, Zweite Auflage, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 55.

[GN98] A. Grigor'yan and M. Noguchi, *The heat kernel on hyperbolic space*, Bull. London Math. Soc. **30** (1998), no. 6, 643–650. MR MR1642767 (99h:58183)

[Har75] G. Harder, *On the cohomology of discrete arithmetically defined groups*, Discrete subgroups of Lie groups and applications to moduli (Internat. Colloq., Bombay, 1973), Oxford Univ. Press, Bombay, 1975, pp. 129–160. MR MR0425018 (54 #12976)

[HC65] Harish-Chandra, *Invariant eigendistributions on a semisimple Lie group*, Trans. Amer. Math. Soc. **119** (1965), 457–508.

[Hei90] W. Hein, *Einführung in die Struktur- und Darstellungstheorie der klassischen Gruppen*, Hochschultext, Springer-Verlag, Berlin, 1990.

[JL93] J. Jorgenson and S. Lang, *Basic analysis of regularized series and products*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1564, Springer-Verlag, Berlin, 1993.

[Kos61] B. Kostant, *Lie algebra cohomology and the generalized Borel-Weil theorem*, Ann. of Math. (2) **74** (1961), 329–387.

[LMR00] A. Lubotzky, S. Mozes, and M. S. Raghunathan, *The word and Riemannian metrics on lattices of semisimple groups*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. (2000), no. 91, 5–53 (2001).

[Mar88] A. S. Markus, *Introduction to the spectral theory of polynomial operator pencils*, Translations of Mathematical Monographs, vol. 71, American Mathematical Society, Providence, RI, 1988, Translated from the Russian by H. H. McFaden, Translation edited by Ben Silver, With an appendix by M. V. Keldysh.

[Mau57] F. I. Mautner, *Geodesic flows on symmetric Riemann spaces*, Ann. of Math. (2) **65** (1957), 416–431.

[Mia79] R. J. Miatello, *On the Plancherel measure for linear Lie groups of rank one*, Manuscripta Math. **29** (1979), no. 2-4, 249–276.

[Mia80] R. J. Miatello, *The Minakshisundaram-Pleijel coefficients for the vector-valued heat kernel on compact locally symmetric spaces of negative curvature*, Trans. Amer. Math. Soc. **260** (1980), no. 1, 1–33.

[Mil78] J. Millson, *Closed geodesics and the η-invariant*, Ann. of Math. (2) **108** (1978), no. 1, 1–39.

[MM63] Y. Mathsushima and S. Murakami, *On vector bundle valued harmonic forms and automorphic forms on symmetric Riemannian manifolds*, Annals of Mathematics **78** (1963), no. 2, 365–416.

[MM82] A. S. Markus and V. I. Matsaev, *Comparison theorems for spectra of linear operators and spectral asymptotics*, Trudy Moskov. Mat. Obshch. **45** (1982), 133–181. MR MR704630 (85b:47002)

[MS] H. Moscovici and R. J. Stanton, *Holomorphic torsion and Bott-Chern numbers for Hermitian locally symmetric manifolds*, Private correspondence by Müller 2006.

[MS89] ———, *Eta invariants of Dirac operators on locally symmetric manifolds*, Invent. Math. **95** (1989), no. 3, 629–666.

[MS91] ———, *R-torsion and zeta functions for locally symmetric manifolds*, Invent. Math. **105** (1991), no. 1, 185–216.

[Mül87] W. Müller, *Manifolds with cusps of rank one*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1244, Springer-Verlag, Berlin, 1987, Spectral theory and L^2-index theorem.

[Mül93] ______, *Analytic torsion and R-torsion for unimodular representations*, J. Amer. Math. Soc. **6** (1993), no. 3, 721–753.

[Mül98] ______, *The trace class conjecture in the theory of automorphic forms. II*, Geom. Funct. Anal. **8** (1998), no. 2, 315–355.

[Nel59] E. Nelson, *Analytic vectors*, Ann. of Math. (2) **70** (1959), 572–615.

[Oni04] A. L. Onishchik, *Lectures on real semisimple Lie algebras and their representations*, ESI Lectures in Mathematics and Physics, European Mathematical Society (EMS), Zürich, 2004.

[Rag72] M. S. Raghunathan, *Discrete subgroups of Lie groups*, Springer-Verlag, New York, 1972, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Band 68.

[RS78] M. Reed and B. Simon, *Methods of modern mathematical physics. IV. Analysis of operators*, Academic Press [Harcourt Brace Jovanovich Publishers], New York, 1978.

[Sel56] A. Selberg, *Harmonic analysis and discontinuous groups in weakly symmetric Riemannian spaces with applications to Dirichlet series*, J. Indian Math. Soc. (N.S.) **20** (1956), 47–87.

[Shu01] M. A. Shubin, М. А. Шубин псевдодифференциалные операторы и спектралная теория, 2 ed., Наука, 2001.

[Vor87] A. Voros, *Spectral functions, special functions and the Selberg zeta function*, Comm. Math. Phys. **110** (1987), no. 3, 439–465.

[Wal73] N. R. Wallach, *Harmonic analysis on homogeneous spaces*, Marcel Dekker Inc., New York, 1973, Pure and Applied Mathematics, No. 19.

[Wal76] ______, *On the Selberg trace formula in the case of compact quotient*, Bull. Amer. Math. Soc. **82** (1976), no. 2, 171–195.

[War72a] G. Warner, *Harmonic analysis on semi-simple Lie groups. I*, Springer-Verlag, New York, 1972, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 188.

[War72b] ______, *Harmonic analysis on semi-simple Lie groups. II*, Springer-Verlag, New York, 1972, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 189.

Lebenslauf

Persönliche Daten

Artur Wotzke
Nonnstrasse 7
53119 Bonn

Tel.: 0228-2273652
E-Mail: wotzke@math.uni-bonn.de

Geboren am 17. 02. 1976 in Frunse (Kirgisistan)
Ledig, deutsch

Schulbildung

09/1983–05/1987	Grundschule (Nr. 59)
09/1987–05/1990	Gymnasium in Frunse
09/1990–06/1996	Nicolaus-Cusanus Gymnasium in Bonn
06/1996	Abitur

Wehrdienst

10/1996–10/1997

Studium

seit 10/1997	Mathematik mit Nebenfach Physik an der Rheinischen Friedrich–Wilhelms–Universität Bonn.
10/2000	Diplom–Vorprüfung in Mathematik mit Nebenfach Physik.
03/2004	Diplom in Mathematik mit Nebenfach Physik.
Seit 04/2004	Promotion in Mathematik.

Bonn, 21.04.2008