Prof. Dr. Jens Franke
Jan Büthe

Testatreihe 4C

Testat 12(II). Man integriere das Vektorfeld

$$\vec{v}(x,y,z) = (1,0,-1+z)$$

über das Dreieck mit den Ecken

$$\begin{aligned} P &= (1,0,-1) \\ Q &= (0,0,0) \\ R &= (2,-1,0) \end{aligned}$$

Das Dreieck soll so orientiert werden, dass sich P von R aus gesehen links von Q befindet.
Lösung: $\frac{1}{6}$

Testat 13(II). Man berechne die Oberfläche der durch $(t, f(t)\cos(\phi), f(t)\sin(\phi))$ mit $0 \leq t \leq \infty$ und $0 \leq \phi \leq g(t)$ parametrisierten Fläche im $\mathbb{R}^3$, wobei f und g durch

$$\begin{aligned} f(t) &= 2 + 4 \cdot \cosh(\frac{t}{4}) \\ g(t) &= \exp(-t) \end{aligned}$$

gegeben sind
Lösung: $\frac{34}{5}$

Testat 1(III). Finden Sie jeweils die stärkste Aussage, die auf die nachfolgenden Funktionen f zutrifft.

A f ist auf ganz $\mathbb{C}$ holomorph.

B f ist auf $\mathbb{C}$ bis auf eine diskrete Teilmenge holomorph.

C f ist auf einer dichten Teilmenge von $\mathbb{C}$ holomorph.

Dabei ist es auch möglich, dass keine der Aussagen zutrifft.

$$f(z) = \operatorname{cotan}(z^2) - \log(1 - z^5)^2$$
$$f(z) = \arctan(|z|) - |z|$$
$$f(z) = e^{z \log 3} + (z \log(4))^2$$

Lösung: C, X, A

Testat 2(III). Man bestimme den Konvergenzradius der folgenden Potenzreihe:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n^3}}{1 + n^{n^2} + 3^n \cdot e^{5n^2}}$$

Lösung: 1

Testat 3(III). Man berechne das Kurvenintegral von

$$(2 \cdot i \cdot \Re(z) + (2 - 8 \cdot i) \cdot \Im(z) + 3 - 5 \cdot i) \, dz$$

entlang folgender Kurve: Der Halbkreis mit Mittelpunkt 0 von 2 nach -2 über $-2 \cdot i$.
Lösung: $-12 + 20 \cdot i + (8 - 16 \cdot i) \cdot \pi$.

Testat 4(III) Entscheiden Sie, ob die folgenden Funktionen an den angegebenen Stellen eine hebbare Singularität (H), eine nicht-isolierbare Singularität (N), eine wesentliche Singularität (W) oder eine Polstelle (P) haben.

$$\frac{\sin(\tan(z/2)^2)}{z^2 + \pi}, \qquad z = \pi$$
$$\frac{\cos(z) - 1}{\sin(z)^2}, \qquad z = 2\pi$$
$$\exp\Big(\tan(z) - \frac{1}{2}\tan(z)^2\Big), \qquad z = \frac{\pi}{2}$$

Lösung: W, H, W

Testat 5(III). Berechnen Sie das Residuum der Funktion

$$\frac{-2 \cdot \sin(3z) - 4 \cdot \tan(4z)}{\sin(z)}$$

an der Stelle 0.
Lösung: 0.

Testat 6(III). Integrieren Sie

$$\frac{\exp(z^2)}{(z^4 + 10 \cdot z^2 + 9)}\, dz$$

entlang der folgenden Kurve: Der Kreis mit Radius 2 und Mittelpunkt -1, mathemematisch negativ durchlaufen.
Lösung: 0.

Testat 7(III). Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Potenzreihenentwicklung der Funktion

$$\frac{(z^4 + 5 \cdot z^3 + 8 \cdot z^2 + 4 \cdot z) \cdot (\sin(2 \cdot z) - \cos(2 \cdot z))}{(z^4 - z^3 - 3 \cdot z^2 + z + 2)}$$

im Nullpunkt.
Lösung: 1.

Testat 8(III). Berechnen Sie

$$\int_0^\infty \frac{(5 \cdot t + 2) \cdot \sqrt{t}}{(t^4 + 12 \cdot t^3 + 49 \cdot t^2 + 78 \cdot t + 40)}\, dt.$$

Lösung: $\frac{25 \cdot \pi}{4} - \frac{4 \cdot \sqrt{2}\pi}{3} - \frac{23 \cdot \sqrt{5}\pi}{12}$.

Testat 9(III). Berechnen Sie

$$\int_0^\infty \frac{(5 \cdot t) \cdot \sqrt{t}}{(t^4 + 13 \cdot t^3 + 60 \cdot t^2 + 116 \cdot t + 80)}\, dt.$$

Lösung: $-\frac{95\cdot\sqrt{2}\pi}{36} - \frac{25\cdot\sqrt{5}\pi}{9} + 10\cdot\pi$.